Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Hipergeométricas - Ejercicios

1. Combinando las dos igualdades del problema 6 del tema, deducir:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\ {}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x) $$

y demostrar que $\forall\ \beta$

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\beta;x) = (1-x)^{-\alpha} $$

y en particular

$$ {}_2F_1(-n,1;1;1-x) = x^n \quad (n=0,1,2,....) $$

2. Demsotrar que si $\gamma > c > 0$, entonces:

$$ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c)\Gamma(\gamma-c)}\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{\gamma-c-1}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;c;xt)dt = \ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) $$

3. Verificar que

$$ \frac{d}{dx}\ {}_pF_q(\alpha_r,\gamma_s;x) = \frac{\prod_{r=1}^{p}\alpha_r}{\prod_{s=1}^{q}\gamma_s}\ {}_pF_q(\alpha_r+1,\gamma_s+1;x) $$

escribir la expresión de la fórmula que generaliza a ésta para el caso de aplicar el operador derivada reiteradas veces.

4. Demsotrar que:

$$ \int_0^\infty e^{-st}\ {}_1F_1(\alpha,\gamma;t)dt = \frac{1}{s}\ {}_2F_1(\alpha,1;\gamma;\frac{1}{s}) $$

lo que demuestra que existe una relación entre la función Hipergeométrica y la función Hipergeométrica Confluente, vía la transformada de Laplace. (**Indicación:** demostrar que $\int_0^\infty e^{-st}t^k dt = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad k=0,1,2,...$).