Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones de Bessel - Ejercicios

1. Demostrar que las funciones de Bessel de primera especie verifican la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{du}\left[u^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{u})\right] = u^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}(2\sqrt{u})$$

2. Haciendo uso de la igualdad

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

verificar, para $\nu > -1$, la igualdad

$$\int_0^x J_\nu(t)dt = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(x)$$

Incicación: Derivar en los dos lados de la igualdad

3. Si denotamos por $j_{\nu,1},\ j_{\nu,2},\ ....$ los ceros positivos de $J_\nu(x)$ ordenados de forma creciente, demostrar que si $\nu > -1$,

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < .....$$

Indicación: Domostar haciendo uso del teorema de Rolle que entre dos ceros consecutivos de $x^{-\nu}J_\nu(x)$ hay al menos un cero de $x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ y que entre dos ceros consecutivos de $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ hay al menos un cero de $x^{\nu+1}J_\nu(x)$.