Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Gamma y Beta-Ejercicios

1. Demostar que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}lnt\ dt = \Gamma(x)\Psi(x) \quad (x \in \mathbb{R} - [\mathbb{Z}^- \cup \{0\}])$$

donde $\Psi(x)$ es la derivada logarítmica de $\Gamma(x)$. Aplicar este resultado para hallar el valor de la integral

$$\int_0^\infty e^{-t}t^3lnt\ dt$$

2. Demostrar que $\forall x > 0$ y $\forall y > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}ln\ t\ dt = B(x,y)[\Psi(x) - \Psi(x+y)]$$

donde $\Psi(x)$ es la derivada logarítmica de $\Gamma(x)$.

3. La función gamma incompleta $\gamma(x,\alpha)$ y su complemento $\Gamma(x,\alpha)$ se definen por las fórmulas:

$$\gamma(x,\alpha) = \int_0^\alpha e^{-t}t^{x-1}dt, \quad (x > 0)$$

$$\Gamma(x,\alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

De forma que $\gamma(x,\alpha) + \Gamma(x,\alpha) = \Gamma(x)$. Probar las siguientes igualdades:

- $\gamma(x+1,\alpha) = x\gamma(x,\alpha) - e^{-\alpha}\alpha^x$
- $\Gamma(x+1,\alpha) = x\Gamma(x,\alpha) + e^{-\alpha}\alpha^x$
- $\dfrac{d\,\gamma(x,\alpha)}{d\alpha} = \alpha^{x-1}e^{-\alpha}$
- $\dfrac{d\,\Gamma(x,\alpha)}{d\alpha} = -\alpha^{x-1}e^{-\alpha}$

Deducir la siguiente representación, para $x \neq 0, -1, -2, ...$

$$\gamma(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{k+x}}{k!(k+x)}$$