Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Elementales-Ejercicios

1. Una función f, continua en el eje real positivo, tiene la propiedad de que cualquiera que sean $x > 0$ e $y > 0$

$$\int_1^{xy} f(t)dt = y\int_1^x f(t)dt + x\int_1^y f(t)dt$$

Si $f(1) = 3$, calcular $f(x)$ para todo $x > 0$.

2. Una función F está definida por la siguiente integral

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt \qquad si\ x > 0$$

(a) Estudiar para qué valores de x es cierto que $ln\ x \leq F(x)$.

(b) Demostrar que $\int_1^x \frac{e^t}{t+a}dt = e^{-a}[F(x+a) - F(1+a)]$.

(c) De forma análoga, expresar las siguientes integrales en función de F.

$$\int_1^x \frac{e^{at}}{t}dt, \quad \int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt, \quad \int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$$

3. Sea $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ y $f(x) = e^x p(x)$

(a) Probar que $f^{(n)}(0)$, derivada n-ésima de f en el punto 0, es $c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2$.

(b) Resolver el mismo problema cuando $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

(c) Generalizarlo a un polinomio de grado m.