CAPÍTULO VI

VI ECUACIÓN DE LAPLACE EN EL PLANO

VI.1. Fórmula de Poisson. Funciones armónicas

Comenzamos con el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el círculo unidad en el plano $B_1(0)$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in B_1(0) \\ u = f(x,y) & (x,y) \in \partial B_1(0). \end{cases} \tag{C}$$

Definimos como solución *clásica* u de (C) a la que satisface $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ (escribiremos B en vez de $B_1(0)$ para abreviar).

Más generalmente, el problema de Dirichlet n-dimensional en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para soluciones clásicas consiste en hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = f & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{D}$$

donde $f \in C(\partial\Omega)$ es un dato.

La unicidad de soluciones para (D) es consecuencia de un principio débil del máximo. A saber,

Principio débil del máximo. *Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface:*

$$-\Delta u \leq 0$$

en Ω entonces,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Observación. El correspondiente "principio del mínimo" se obtiene sin más que cambiar el $-\Delta u \leq 0$ por $-\Delta u \geq 0$ en el enunciado.

Es conveniente introducir las siguientes definiciones.

Definición. Una u de clase C^2 en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice armónica (r. subarmónica, superarmónica) en Ω si $-\Delta u = 0$ (r. ≤ 0, ≥ 0) en Ω.

Una consecuencia inmediata del principio del máximo es el principio de comparación.

Corolario. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y u, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tales que $-\Delta u \leq -\Delta v$ en Ω mientras $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces $u \leq v$ en Ω. En particular, el problema:*

$$\begin{cases} \Delta u = F & x \in \Omega \\ u = f & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{DP}$$

admite a lo más una solución clásica para cada $f \in C(\partial\Omega)$, $F \in C(\Omega)$.

Volvamos ahora a un problema más concreto como es el garantizar la existencia de soluciones clásicas para (C). Escribiendo la ecuación de Laplace en coordenadas polares (usamos otra vez el símbolo $u(r,\theta)$ para representar a u) el problema se interpreta como resolver,

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \tag{1}$$

cumpliendo la condición de contorno

$$u(1,\theta) = f(\theta).$$

En principio supondremos que $f \in C^1(T)$ es decir, es C^1 y 2π periódica. Siguiendo la estrategia del método de separación de variables, buscamos soluciones de la forma:

$$u = R(r)\Theta(\theta),$$

donde tenemos en cuenta que R, Θ han de ser C^2 junto con las condiciones de periodicidad:

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

El correspondiente problema de contorno es,

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi), \end{cases}$$

con lo que los autovalores son $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $\Theta_n = \tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \operatorname{sen} n\theta$. La ecuación para R es,

$$r^2 R'' + rR - n^2 R = 0.$$

Imponiendo la condición de que R sea regular en $r = 0$ deducimos $R_n = \tilde{c}_n r^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Una solución formal de (C) es por tanto,

$$u = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \tag{2}$$

donde naturalmente los a_n, b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de f. De las hipótesis sobre f la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Usando el principio del máximo se ve que (2) converge uniformemente en $\overline{B}$. Por tanto u es continua. Es inmediato comprobar que todas las posibles derivadas término a término de (2), con respecto a r, θ, dan series uniformemente convergentes sobre compactos de $r < 1$. Eso significa que u cumple la ecuación (1). Finalmente, unas cuentas detalladas establecen que las derivadas cartesianas u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} vienen definidas, con ayuda de las derivadas de (2) término a término, por series uniformemente convergentes sobre compactos de B. Por tanto Δu es continua. De ahí $\Delta u = 0$ en B (pues esto ya era cierto en casi todo punto).

Observación. Se comprueba sin problemas que $P_N = a_0 + \sum_1^N a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$ es un polinomio en (x, y) de grado N. Es decir (2) es una serie de potencias uniformemente convergente en B. Ello implica que u es en realidad real analítica[1] en B. En cualquier caso (2) es la serie de Taylor de u centrada en (0,0).

La expresión (2) se puede manipular para llegar a una expresión integral de f. Esto permite relajar la regularidad de C^1 a continua para f. En efecto, podemos escribir,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\{\frac{1}{2} + \sum_1^N r^n \cos n(\theta - t)\}\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - t)\}\ dt, \end{aligned}$$

en virtud de la convergencia uniforme del integrando. Usando, por ejemplo, la parte real de la serie geométrica compleja $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\phi})^n = \dfrac{1}{1 - re^{i\phi}}$ se llega a que:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - t) = \frac{1}{2}\frac{1 - r^2}{r^2 + 1 - 2r\cos(\theta - t)}.$$

Por tanto,

$$u(r,\theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{r^2 + 1 - 2r\cos(\theta - t)}\ dt.$$

En coordenadas cartesianas,

$$u(\bar{x}) = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_{|\bar{y}|=1} \frac{f(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2}\ d\bar{y}. \tag{3}$$

Se conoce a (3) como fórmula de Poisson. Tiene perfecto sentido si $f \in C(T)$ (‘!menos regularidad es posible!). En principio (3) da una reprsentación de toda solución clásica. En particular se tiene:

$$1 = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_{|\bar{y}|=1} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|^2}\ d\bar{y} \qquad \bar{x} \in B. \tag{3$'$}$$

El siguiente resultado asegura que (3) proporciona todas las soluciones clásicas de (C)

Teorema. *Si f es continua en $r = 1$, (3) extendida con el valor f en $r = 1$ define la única solución clásica de (C).*

Es inmediato que la solución de (C) en la bola $B_R(P)$ es exactamente,

$$u(\bar{x}) = \frac{R^2 - |\bar{x} - P|^2}{2\pi R}\int_{|\bar{y}-P|=R} \frac{f(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2}\ dS_{\bar{y}}. \tag{4}$$

En particular, si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω entonces se tiene:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|\bar{y}-P|=R} f(\bar{y})\ dS_{\bar{y}}, \tag{5}$$

cualquiera que sea la bola $\overline{B}_R(P) \subset \Omega$. Esta es la propiedad de la media. Se tiene además,

[1]Una serie uniformemente convergente de polinomios es siempre una función real analítica ([FJ].

Teorema. *Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica y $B_R(P)$ es como arriba entonces,*

$$u(P) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|\bar{y}-P|\leq R} f(\bar{y})\ d\bar{y}. \tag{6}$$

Del hecho de que toda función armónica en Ω se puede representar cerca de cualquier punto $P \in \Omega$ en la forma (4) se tiene el,

Teorema. *Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Otra conclusión importante es el,

Principio fuerte del máximo. *Sea Ω un dominio del plano donde u es armónica con $M = \sup_\Omega u < \infty$. Si para algún $x_0 \in \Omega$, $u(x_0) = M$ entonces $u = M$.*

Por otro lado, la propiedad de la media caracteriza asimismo las funciones armónicas.

Teorema. *Supongamos que $u \in C(\Omega)$ satisface la propiedad de la media en Ω, es decir, para toda bola $\overline{B}_R(P) \subset \Omega$ se cumple la identidad (5). Entonces u es armónica en Ω.*

Como se ha dicho, la fórmula de Poisson permite datos más generales que $f \in C(T)$. Por ejemplo si $f \in L^1(T)$ o $f \in L^\infty(T)$. En este caso (3) define de nuevo una función u armónica y acotada (ver (3)') que cumple:

$$\lim_{Q\to P} u(Q) = f(P),$$

si $P \in \partial B$ es un punto de continuidad de f. Si f es continua a trozos en el sentido de que sólo presenta un número finito de discontinuidades de salto (por ejemplo la función característica de un arco $\overset{\frown}{AB}$), la fórmula de Poisson da una solución acotada de (C) que ajusta con f en los puntos de continuidad. La solución es además única en la clase de las funciones acotadas en B. Esto es consecuencia del siguiente resultado.

Teorema de Phragmén-Lindelöf. *Sea u armónica en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in L^\infty(\Omega)$ mientras $u \in C(\overline{\Omega} \setminus \{P_1, \ldots, P_N\})$ donde $\{P_1, \ldots, P_n\} \subset \partial\Omega$. Entonces:*

$$\inf_{\partial\Omega\setminus\{P_1,\ldots,P_N\}} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega\setminus\{P_1,\ldots,P_N\}} u \qquad x \in \Omega.$$

Observaciones.

a) La función

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta},$$

es armónica en B y se anula en $\partial B \setminus \{(1,0)\}$. Sin embargo no es idénticamente nula. Nótese que $u(r,0)$ crece sin límite cuando $r \to 1-$.

b) La demostración pone de manifiesto que la propiedad de acotación puede substituirse por la menos restrictiva de que $u \in C(\overline{\Omega} \setminus \{P_1, \ldots, P_N\})$, $\{P_1, \ldots, P_N\} \subset \partial\Omega$, junto con

$$\lim_{P\to P_i} \frac{u(P)}{\log|P-P_i|} = 0 \qquad 1 \leq i \leq N.$$

c) Cuando el dato f es continuo a trozos y $P \in \partial B$ es un punto de discontinuidad de salto de f en P entonces u sufre un tipo de discontinuidad que ya observamos en la ecuación del calor (ver el epígrafe siguiente).

Dominios simplemente conexos.

En la sección de ejercicios se estudian las aplicaciones conformes del plano. Se identifican éstas con las funciones holomorfas con derivada no nula. Se prueba también que las aplicaciones conformes transforman funciones armónicas en funciones armónicas. Por otra parte, un conocido teorema de Riemann (ver [Ru, Cap. 14]) establece que todo dominio simplemente conexo Ω del plano, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, se pude transformar mediante un homeomorfismo conforme $T \in H(\Omega)$ en el disco unidad B. Si Ω es acotado y de frontera $\partial\Omega$ *simple* en el sentido de que todo punto $P \in \partial\Omega$ es el extremo de un arco Γ que cumple $\Gamma \setminus \{P\} \subset \Omega$, entonces la transformación conforme $T \in H(\Omega)$ se puede extender a un homeomorfismo $T : \overline{\Omega} \to \overline{B}$ (ver [Ru, Cap. 14]).

Tenemos así un teorema general de existencia de soluciones.

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simplemente conexo del plano con frontera simple. Entonces el problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

admite, para cada $f \in C(\Omega)$, una única solución clásica.

Observaciones. Puede demostrarse más generalmente (ver por ejemplo [CO, Cap. X]) que el problema de Dirichlet (D) es siempre resoluble en cualquier dominio Ω del plano en el que $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ carezca de componentes conexas que se reduzcan a un punto (ver el §3).

Deducción geométrica de la fórmula de Poisson.

La fórmula de Poisson puede generarse a partir de argumentos geométricos elementales apoyados en la función argumento $\theta = \theta(x, y)$ (ver el Capítulo I).

Primeramente obtendremos una solución del problema,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in B \\ u = \chi_{AB} & (x, y) \in \partial B \end{cases} \tag{7}$$

donde χ_{AB} es la función característica de un arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ correspondiente a un ángulo central θ_0.

Definimos $\varphi(P)$ como el ángulo orientado con vértice en P y medido desde el segmento PA al PB. Lo primero que debe observarse es que φ es constante sobre cada uno de los arcos abiertos y orientados $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{AB}$ en ∂B. De hecho: $\varphi = \theta_0/2$ sobre $\overset{\frown}{BA}$, $\varphi = \pi + \theta_0/2$ en $\overset{\frown}{AB}$, mientras las curvas de nivel de φ son arcos capaces sobre $\overset{\frown}{AB}$.

Por otro lado, una expresión analítica para φ es la siguiente,

$$\varphi(P) = \theta(P - B) - \theta(P - A). \tag{8}$$

Si, por ejemplo, A y B están en $x \geq 0$ φ es inmediatamente armónica en B. Otras posiciones de A, B requerirían emplear la función argumento con línea de corte en el eje $x \leq 0$.

La función $\psi(P) = \dfrac{1}{\pi}\{\varphi(P) - \dfrac{\theta_0}{2}\}$ es pues la única solución acotada del problema (7). De nuestra experiencia con la ecuación del calor sabemos que esta solución básica permite llegar a soluciones muy generales.

En efecto, si $f \in C(T)$ y fraccionamos ∂B en n arcos, es decir el intervalo $(0, 2\pi)$ en $0 \leq \theta_1 \leq \cdots \theta_n = 2\pi$ una aproximación poligonal de f es $f_n = \sum_1^n f(\tilde{\theta}_i)\chi_{(\theta_{i-1},\theta_i)}$ con $\tilde{\theta}_i \in (\theta_{i-1}, \theta_i)$. Si u_i es la solución correspondiente al dato $\chi_{(\theta_{i-1},\theta_i)}$ entonces,

$$u_i(x, y) = \frac{1}{\pi}\{h(\theta_{i-1} + \Delta\theta) - h(\theta_{i-1})\},$$

donde $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$,

$$h(\theta) = \text{arctag}\left(\frac{y - \text{ sen } \theta}{x - \cos\theta} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Nótese que,

$$h'(\theta) = \frac{1 - r^2}{2[r^2 + 1 + 2(x\cos\theta + y \text{ sen } \theta]}.$$

Si u_{f_n} es la solución acotada correspondiente a f_n entonces,

$$\begin{aligned} u_{f_n}(x, y) &= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{\theta}_i)\{h(\theta_{i-1} + \Delta\theta) - h(\theta_{i-1})\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - r^2}{r^2 + 1 + 2(x\cos\hat{\theta}_i + y \text{ sen } \hat{\theta}_i)} f(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\theta}_i$, $\hat{\theta}_i \in (\theta_{i-1}, \theta_i)$ y $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Cuando $n \to \infty$ el valor límite de u_{f_n} es,

$$u_f(x, y) = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{r^2 + 1 + 2(x\cos\theta + y \text{ sen } \theta)}\, d\theta,$$

que es precisamente la fórmula de Poisson.

Observación.

La construcción de la función φ en (8) muestra que

$$\lim_{r\to 1}\varphi(r, \alpha) = \lim_{r\to 1}\varphi(r, \beta) = \frac{1}{2}(\theta_0 + \pi),$$

donde α, β son los ángulos correspondientes a A, B, $\theta_0 = \beta - \alpha$. Este ejemplo permite probar que para cada $\tau \in [\theta_0/2, \theta_0/2 + \pi]$ existe un arco Γ de círculo que pasa por A y B donde $u_{|\Gamma} = \tau$. Más generalmente, se tiene,

Teorema. *Sea u la solución acotada de (C) que corresponde a un dato continuo a trozos f que exhibe una discontinuidad de salto en $P_0 = P_0(\theta_0)$. Entonces, para todo τ intermedio a $f(\theta_0-)$ y $f(\theta_0+)$ existe un arco de círculo que pasa por P donde $\lim_{P\to P_0, P\in\Gamma} u(P) = \tau$. Además,*

$$\lim_{r\to 1-} u(r,\theta_0) = \frac{1}{2}\{f(\theta_0+) + f(\theta_0-)\}.$$

Problema de Dirichlet en un rectángulo.

Consideremos el rectángulo $Q = [0,\pi]\times[0,A]$, $A > 0$ y el dato $\tilde{f}$ que es cero en todos los lados de Q excepto en $y = 0$ donde $\tilde{f}(x,0) = f(x) \in C^1[0,\pi]$, función que cumple $f(0) = f(\pi) = 0$.

El método de separación de variables y el principio débil del máximo nos llevan a que la solución clásica del problema,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y)\in Q \\ u = \tilde{f} & (x,y)\in \partial Q, \end{cases}$$

viene expresada por:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\operatorname{senh} nA} \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(A-y), \tag{1}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Si consideramos el núcleo,

$$G(\xi,x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} nA}{\operatorname{senh} n(A-y)} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi,$$

obtenemos una función C^∞ que es armónica en $0 < y < A$. En efecto, la serie junto con todas sus derivadas convege uniformemente sobre compactos de $0 < y < A$. Bajo la hipótesis de acotación de f la serie (1) se puede escribir como,

$$u(x,y) = \int_0^{\pi} G(\xi,x,y) f(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Usando los mismos argumentos que en el §VII.1.1 se prueba que:

$$G(\xi,x,y) \geq 0 \qquad 0\leq x\leq \pi \quad 0\leq x\leq\pi \quad 0<y<A,$$

mientras,

$$\int_0^{\pi} G(\xi,x,y)\, d\xi \leq 1 \qquad 0\leq x\leq\pi \quad 0<y<A.$$

Por otro lado,

$$\int_0^\pi G(\xi, x, y) \text{ sen } \xi \; d\xi = \frac{\text{senh } (A-y)}{\text{senh } A} \text{ sen } x,$$

es decir,

$$\int_0^\pi G(\xi, x, y) \frac{\text{senh } A \text{ sen } \xi}{\text{senh } (A-y) \text{ sen } x} \; d\xi = 1.$$

Si $x_0 \in I = (0, \pi)$ es un punto de continuidad de $f \in L^\infty(I)$, $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, entonces

$$|u(x, y) - f(x_0)| \leq \{\int_{I_\delta} + \int_{I \setminus I_\delta}\} G(\xi, x, y) |f(\xi) - f(x_0) \frac{\text{senh } A \text{ sen } \xi}{\text{senh } (A-y) \text{ sen } x}| \; d\xi.$$

La primera integral puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal que lo sea δ. La segunda (ver §VII.7.1) se hace pequeña si $x \sim x_0$ y $t \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

Teorema. *Para $f = f(x, y)$ continua y arbitraria, el problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in Q \\ u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \partial Q, \end{cases}$$

admite una solución acotada $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q} \setminus \{A, B, C, D\})$, donde A, B, C y D son los vértices de Q.

Observaciones. a) La solución construída en el teorema por el método de separación de variables se extiende por continuidad a todo $\overline{Q}$ pues coincide con la solución clásica que se obtiene en virtud del teorema de la aplicación de Riemann.

b) Si en las consideraciones precedentes $f \in L^\infty$ tiene una discontinuidad de salto en $x_0 \in (0, \pi)$ el comportamiento de la solución acotada u puede estudiarse teniendo en cuenta la determinación del argumento $\theta_1(x - x_0, y)$, donde la línea de corte de θ_1 es el semieje $y \leq 0$.

VI.2 Ecuación de Poisson

Nos ocupamos ahora de estudiar un tema más delicado como es problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson,

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } B \\ u = 0 & \text{en } \partial B. \end{cases} \tag{P}$$

Lo primero que haremos es usar el método de separación de variables para producir una representación integral de la solución clásica. A tal efecto suponemos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ resuelve (P), en particular $F \in C(\Omega)$. Transformamos (P) a coordenadas polares (r, θ) y para cada $0 < r < 1$ representamos $u(r,\cdot)$, $u_r(r,\cdot)$, $u_{rr}(r,\cdot)$, $u_{\theta\theta}(r,\cdot)$ y $F(r,\cdot)$ en serie de Fourier para tener,

$$u(r,\cdot) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\theta + b_n(r) \text{ sen } n\theta$$
$$u_r(r,\cdot) = a_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r)\cos n\theta + b_n'(r) \text{ sen } n\theta$$
$$u_{rr}(r,\cdot) = a_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(r)\cos n\theta + b_n''(r) \text{ sen } n\theta$$
$$u_{\theta\theta}(r,\cdot) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(r)\cos n\theta + n^2 b_n(r) \text{ sen } n\theta$$
$$F(r,\cdot) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\cos n\theta + B_n(r) \text{ sen } n\theta,$$

siendo las convergencias en $L^2(0,2\pi)$. La ecuación en derivadas parciales,

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0,$$

nos lleva a las ecuaciones para los coeficientes:

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{n^2}{r^2}u = -F(r) \qquad 0 < r < 1, \tag{1}$$

donde $n = 0, 1, \ldots$. Los coeficientes a_0, a_n, b_n quedan determinados como funciones C^2 en $(0,1)$ que se anulan en $r = 1$ mientras en el origen satisfacen la propiedad de estar acotadas. El segundo miembro de (1) es en cada caso A_0, A_n y B_n, respectivamente.

El problema de contorno fundamental es pues,

$$\begin{cases} (ru')' - \frac{n^2}{r}u = rF(r) \\ u(1) = 0\,, u = O(1) \text{ para } r \to 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $F \in C[0,1]$. Usando las ideas del Cap. VII (ver Ejercicios) la solución de (2) se puede representar en forma integral como,

$$u(r) = \int_0^1 G_n(r,\rho)\rho\, d\rho, \tag{3}$$

donde,

$$G_0(r,\rho) = \begin{cases} \log(\frac{1}{r}) & r > \rho \\ \log(\frac{1}{\rho}) & r \le \rho, \end{cases}$$

mientras,

$$G_n(r,\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(r^{-n} - r^n\right)\rho^n & r > \rho \\ \dfrac{1}{2n}\left(\rho^{-n} - \rho^n\right) r^n & r \le \rho, \end{cases}$$

para $n \geq 1$. De (3) podemos estimar u como sigue,

$$|u(r)|^2 \le \frac{1}{4n^2}\{\int_0^1 4n^2 G^2(r,\rho)\rho\ d\rho\}\{\int_0^1 F^2(\rho)\rho\ d\rho\}. \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^1 4n^2 G^2(r,\rho)\rho\ d\rho &= \int_0^r (1-r^{2n})^2(\frac{\rho}{r})^{2n}\rho\ d\rho + \int_r^1 (1-\rho^{2n})^2(\frac{r}{\rho})^{2n}\rho\ d\rho \\ &= r^2\int_0^1 u^{2n+1}\ du + \int_r^1 (1-\rho^{2n})^2(\frac{r}{\rho})^{2n}\rho\ d\rho \\ &\le \frac{1}{2n+1} + r^2\int_r^1 (\frac{r}{\rho})^{2n-1}\frac{1}{r}\ d\rho \\ &\le \frac{1}{2n+1} + \int_1^\infty \frac{dz}{z^{2n-1}} \\ &\le \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la solución de (2) satisface la estimación,

$$|u(r)|^2 \le \frac{1}{4n^2(n+\frac{1}{2})}\{\int_0^1 F^2(\rho)\rho\ d\rho\}. \tag{5}$$

Recordemos ahora que cualquier solución clásica se había representado en la forma,

$$u(r,\cdot) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\ \mathrm{sen}\ n\theta, \tag{6}$$

donde $a_n = \int_0^1 G_n A_n \rho\ d\rho$, $b_n = \int_0^1 G_n B_n \rho\ d\rho$. Hemos supuesto que $F \in C(\overline{B})$ (bastaría para lo que sigue $F \in C(B) \cap L^2(B)$), comprobemos que además la serie converge uniformemente en $\overline{B}$. En efecto

$$\begin{aligned} |\sum_M^N a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\ \mathrm{sen}\ n\theta|^2 &\le \{\sum_M^N \frac{2}{n^2}\}\{\frac{1}{4}\int_0^1 \sum_M^N \{A_n^2(\rho) + B_n^2(\rho)\}\rho\ d\rho\} \\ &\le \{\sum_M^N \frac{2}{n^2}\}\{\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} F^2(\rho,\theta)\ d\theta\rho\ d\rho\} \\ &\le \{\sum_M^N \frac{2}{n^2}\}\{\frac{1}{4\pi}\iint_B F^2\ dxdy\}. \end{aligned}$$

Vamos a mejorar ahora la expresión (6) para llegar a una representación integral de la solución de (P). Si tenemos en cuenta la relación funcional entre los a_n, b_n y F podemos escribir,

$$u(r,\theta) = \int_0^1 G_0(r,\rho)A_0(\rho)\rho d\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 G_n(r,\rho)(A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\ \mathrm{sen}\ n\theta)\rho\ d\rho.$$

Permutando formalmente la serie con la integral con respecto a ρ, expresando los A_n y B_n en términos de F e intercambiando –ahora legalmente– las integrales con la serie llegamos a la expresión:

$$u(r,\theta) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} G(r,\theta,\rho,t)F(\rho,t)\rho\ d\rho dt, \tag{7}$$

en donde para $r > \rho$,

$$G(r,\theta,\rho,t) = \frac{1}{2\pi}\{\log(\frac{1}{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(r^{-n} - r^n)\rho^n \cos n(\theta - t)\}, \tag{8}$$

mientras que si $r < \rho$ el valor de G se obtiene intencambiando los valores de r y de ρ. Por otro lado, para $\rho \neq r$ la serie en (8) converge uniformemente con respecto a $t \in [0, 2\pi]$. Asimismo, si $0 < z < 1$ tenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\cos n\alpha &= \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty}\zeta^{n-1}\cos n\alpha\ d\zeta = \int_0^z \frac{\cos\alpha - \zeta}{1 + \zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha}\ d\zeta \\ &= -\frac{1}{2}\log[1 + z^2 - 2z\cos\alpha].\end{aligned}$$

Al introducir estos resultados en (8) obtenemos tras algunas cuentas,

$$G(r,\theta,\rho,t) = \frac{1}{4\pi}\{-\log[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)] + \log[1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)]\}. \tag{9}$$

Nótese que G es simétrica en el sentido de que no varía cuando se intercambian entre sí (r,θ) y (ρ,t). En coordenadas cartesianas, si $\bar{y}^*$ designa el simétrico de $\bar{y}$ con respecto a la circunferencia unidad, $\bar{y}^* = \bar{y}/|\bar{y}|^2$, la función G adopta la forma,

$$G(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2\pi}[-\log|\bar{x} - \bar{y}| + \log|\bar{y}||\bar{x} - \bar{y}^*|], \tag{10}$$

mientras la representación en coordenadas polares (7) toma la forma,

$$u(\bar{x}) = \iint_B G(\bar{x},\bar{y})F(\bar{x},\bar{y})\ d\bar{y}. \tag{11}$$

Se conoce a $G = G(\bar{x},\bar{y})$ como la función de Green del problema de Dirichlet en el disco. Debe observarse que G satisface $G(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{y},\bar{x})$, que para $\bar{y} \in B$, $\Delta_{\bar{x}}G(\cdot,\bar{y}) = 0$ mientras que para cada $\bar{y} \in B$, $G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ en $|\bar{x}| = 1$. Otra propiedad importante es que $G \geq 0$. Es más, sólo se anula si $|x| = 1$ o $|y| = 1$. En efecto,

$$G = \log\left(\frac{1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)}{1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)}\right)$$

Que el argumento sea mayor o igual que 1 equivale a que:

$$(1 - r^2)(1 - \rho^2) \geq 0.$$

La expresión,

$$\Gamma_2(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\log|\bar{x}|,$$

se denomina *solución fundamental* del Laplaciano Δ en el plano.

Toda la discusión previa tiene como objetivo probar el siguiente resultado.

Teorema. *Si $F \in C^1(B) \cap L^\infty(B)$ entonces*

$$u(\bar{x}) = \iint_B G(\bar{x}, \bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y}. \tag{11}$$

define una solución clásica del problema (P).

La demostración del teorema es elaborada y consta de varias etapas. En primer lugar observamos $G = -\Gamma_2(\bar{x} - \bar{y}) + G_2(\bar{x}, \bar{y})$. El término:

$$U(\bar{x}) = \iint_B G_2(\bar{x}, \bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y},$$

es de clase C^∞ en B. En efecto, para $\bar{x}$ en una bola $\overline{B}_0 \subset B$ tanto G_2 como todas sus posibles derivadas se mantienen uniformemente acotadas con $\bar{y} \in B$. El caso más delicado es el de la contonuidad. A tal efecto nótese que $\log(|\bar{y}|^2|\bar{x} - \bar{y}^*|^2) = \log(1 + |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2 - 2\bar{x}\bar{y})$ y que permanece acotada en valor absoluto si $\bar{x} \in \overline{B}_0 \subset B$, $\bar{y} \in \overline{B}$. En particular, U es una función armónica en B.

El término,

$$V(\bar{x}) = \iint_B \Gamma_2(\bar{x} - \bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y},$$

es más delicado de manejar y a su estudio consagramos las siguientes líneas. Se conoce a V como potencial logarítmico con densidad F.

Lema. *Si $F \in L^\infty(B)$ el potencial logarítmico V con densidad F es C^1 en B mientras,*

$$\partial_{x_i}V(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i}\Gamma_2(\bar{x} - \bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y} \qquad i = 1, 2.$$

En particular, la función u definida por (11) es C^1 y,

$$\partial_{x_i}u(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i}G(\bar{x}, \bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y} \qquad i = 1, 2.$$

Demostración. Se considera $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta = 0$ en $t \leq 1$, $\eta = 1$ si $t \geq 2$ mientras $\eta \geq 0$. Para $\varepsilon > 0$ la función:

$$V_\varepsilon(\bar{x}) = \iint_B \Gamma_2(\bar{x} - \bar{y})\eta(|\bar{x} - \bar{y}|/\varepsilon)F(\bar{y})\ d\bar{y},$$

es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ mientras $V_\varepsilon \to V$, $\partial_{x_i} V_\varepsilon \to V_i$ uniformemente en $\mathbb{R}^2$ cuando $\varepsilon \to 0+$, donde:

$$V_i(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i} \Gamma_2(\bar{x} - \bar{y})F(\bar{y})\ d\bar{y},$$

$i = 1, 2$. Esto prueba que el Lema. $\square$

Consideramos ahora la solución clásica del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } B \\ u = 0 & \text{en } \partial B. \end{cases}$$

Tal solución ha de ser radial por lo que es fácil de calcular y viene dada por $u = \dfrac{1}{4}(1 - r^2)$. Si se tiene en cuenta la forma del desarrollo en serie de G se concluye que:

$$\frac{1}{4}(1 - r^2) = \iint_B G(\bar{x}, \bar{y})\ d\bar{y}.$$

En efecto la parte de la serie en los términos $\cos n(\theta - t)$ desaparece y,

$$\iint_B G\ d\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\{2\pi \int_0^r \log(\frac{1}{r})\rho\ d\rho + 2\pi \int_0^r \log(\frac{1}{\rho})\rho\ d\rho\} = \frac{1}{4}(1 - r^2).$$

Del lema anterior,

$$-\frac{x_i}{2} = \iint_B \partial_{x_i} G(\bar{x}, \bar{y})\ d\bar{y} \qquad i = 1, 2.$$

Consideramos finalmente las funciones:

$$u_i(\bar{x}) = \partial_{x_i} u + \frac{x_i}{2} F(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i} G(\bar{x}, \bar{y})(F(\bar{y}) - F(\bar{x}))\ d\bar{y},$$

$i = 1, 2$. Usando el argumento del Lema y la diferenciablidad de F en B se tiene que las funciones

$$w_i(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i} G(\bar{x}, \bar{y})(F(\bar{y}) - F(\bar{x}))\ d\bar{y},$$

son C^1 con derivadas primeras,

$$\partial_{x_j} w_i(\bar{x}) = \iint_B \partial_{x_i x_j} G(\bar{x}, \bar{y})(F(\bar{y}) - F(\bar{x}))\ d\bar{y} - \iint_B \partial_{x_i} G(\bar{x}, \bar{y})\partial_{x_j} F(\bar{x})\ d\bar{y}.$$

Se concluye entonces que, por un lado, $\partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 = \Delta u + F(\bar{x}) + \frac{x_1}{2}\partial_{x_1} F + \frac{x_2}{2}\partial_{x_2} F$, mientras que de $\Delta_{\bar{x}} G(\cdot, \bar{y}) = 0$ para $\bar{x} \in B\backslash\{\bar{y}\}$ se deduce $\partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 = \frac{x_1}{2}\partial_{x_1} F + \frac{x_2}{2}\partial_{x_2} F$. Por tanto $-\Delta u = F$ en B.

Finalmente la función u definida en (11) satisface también la condición de contorno pues,

$$|u| \leq |F|_{\infty,B} \iint_B G\ d\bar{y} \leq \frac{|F|_{\infty,B}}{4}(1 - r^2) \to 0,$$

cuando $r \to 1-$. Esto cierra la demostración del teorema

Una consecuencia de la demostración es el siguiente,

Corolario. *Si $F \in C^1(B) \cap L^\infty(B)$ el correspondiente potencial logarítmico V:*

$$V(\bar{x}) = \iint_B \Gamma_2(\bar{x}-\bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y} \qquad i = 1, 2.$$

es C^2 en y satisface $\Delta V = F$ en B.

Con más generalidad se tiene,

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado mientras $F \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entonces, el potencial logarítmico V con densidad F en Ω:*

$$V(\bar{x}) = \iint_\Omega \Gamma_2(\bar{x}-\bar{y})F(\bar{y})\, d\bar{y},$$

es C^2 en Ω y satisface $\Delta V = F$ en Ω.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ pequeño y $x_0 \in \Omega$ arbitrario, tomamos $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donde $F_\varepsilon = F$ en $|\bar{x} - x_0| \leq \varepsilon/2$ y $F_\varepsilon = 0$ para $|\bar{x} - x_0| \geq \varepsilon$. Si:

$$V_\varepsilon(\bar{x}) = \iint_\Omega \Gamma_2(\bar{x}-\bar{y})F_\varepsilon(\bar{y})\, d\bar{y},$$

entonces $V - V_\varepsilon$ es armónica en $|\bar{x} - x_0| < \varepsilon/2$, mientras, por el corolario, V_ε es C^2 en $|\bar{x} - x_0| < \varepsilon$ y $\Delta V_\varepsilon = F_\varepsilon$. Por tanto V es C^2 en $|\bar{x} - x_0| < \varepsilon/2$ y $\Delta V = F$ en dicha región. □

Observaciones. Hemos fabricado la función de Green del problema de Dirichet para la ecuación de Poisson en la bola (se normalizó el radio a la unidad para simplificar). En dominios generales Ω y en dimensiones superiores esta noción se extiende a los efectos de obtener una representación integral del tipo (11) para la solución del problema de Dirichlet. La definición adecuada a tales propósitos es la que sigue.

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Se dice que:

$$\begin{aligned} G : \overline{\Omega} \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\to G(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

es una función de Green para el problema de Dirichlet en Ω si

(1) $G = -\Gamma_2(\bar{x}-\bar{y}) + h(\bar{x}, \bar{y})$, donde $h(\cdot, \bar{y}) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para cada $\bar{y} \in \Omega$.
(2) Para cada $\bar{y} \in \Omega$, $u = h(\cdot, y)$ es la solución clásica del problema,

$$\begin{aligned} &\Delta_{\bar{x}} u = 0 && \bar{x} \in \Omega \\ &u(\bar{x}) = \Gamma_2(\bar{x}-\bar{y}) && \bar{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

De la propia definición se desprende la unicidad de la función de Green sobre Ω. Por otro lado, la función de Green que hemos obtenido en el caso del círculo cumple los requisitos de la definición.

En el contexto n-dimensional exploraremos más aspectos de las funciones de Green.

VI.3. Singularidades evitables

Uno de los objetivos de la sección es probar con un ejemplo que la continuidad de F no es suficiente para asegurar la existencia de soluciones clásicas para el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

ni siquiera en el caso de la bola.

Para ello son necesarios algunos resultados de interés en sí mismos.

El primero describe singularidades evitables de las funciones armónicas.

Teorema. *Sea $u \in C^2(\Omega)$ armónica en $\Omega \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$. Supóngase que además,*

$$u(x) = o(\Gamma_2(x - x_i)) \qquad x \to x_i,$$

para $i \in \{1, \ldots, N\}$. Entonces u admite una única extensión armónica a todo Ω.

El resultado es consecuencia de la siguiente propiedad.

Lema. *Supongamos que u es armónica en $B \setminus \{0\}$, $u = 0$ en ∂B mientras $u = o(\Gamma_2(x))$ cuando $x \to 0$. Entonces $u = 0$ en $B \setminus \{0\}$.*

Demostración. Fijamos $P_0 \in B \setminus \{0\}$. Para $\varepsilon > 0$ arbitrario elegimos $0 < \rho < |P_0|$ tal que:

$$|u(x)| < -\varepsilon \log \rho \qquad |x| = \rho.$$

Formamos el anillo $A_\rho = \{\rho < |x| < 1\}$ y tenemos que $u < -\varepsilon \log |x|$ y que $u > \varepsilon \log |x|$ en ∂A_ρ. Del principio de comparación concluimos que $|u(x)| \leq -\varepsilon \log |x|$ en A_ρ. En particular,

$$|u(P_0)| \leq -\varepsilon \log |P_0|,$$

para cada $\varepsilon > 0$. Por tanto $u(P_0) = 0$. $\square$

Una consecuencia indirecta del lema es el,

Corolario. *El problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en general no es resoluble en $\Omega = B \setminus \{0\}$.

Demostración. En efecto, se trataría de resolver $\Delta u = 0$ en $B \setminus \{0\}$, con $u \in C^2(B \setminus \{0\}) \cap C(\overline{B})$ y valores $u(0) = A$, $u = f$ en $r = 1$ prefijados de antemano. Sin embargo, del lema, el único valor posible para A es precisamente,

$$A = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\bar{y}|=R} f(\bar{y}) \, dS_{\bar{y}}.$$

En consecuencia A no puede prefijarse libremente con independencia de f. $\square$

Otra consecuencia importante del Lema es el siguiente contraejemplo de existencia de soluciones clásicas para el problema de Dirichlet.

Teorema. *El problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2\rho^2}\left[4(-\log r)^{-1/2} + \dfrac{1}{2}(-\log r)^{-3/2}\right] & \text{en } B_R \\ u = (-\log R)^{1/2}(x_1^2 - x_2^2) & \text{en } r = R, \end{cases}$$

no admite soluciones clásicas.

Demostración. Consideramos $u_1 = (-\log r)^{1/2}(x_1^2 - x_2^2)$. Se comprueba que u es C^1 en $\overline{B}_R$ pero no es C^2. Por otro lado,

$$\Delta u_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\rho^2}\left[4(-\log r)^{-1/2} + \frac{1}{2}(-\log r)^{-3/2}\right],$$

en $B_R \setminus \{0\}$. Si existiese una solución clásica $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B})$ tendríamos, por el lema, que $u = u_1$ en $0 < r < R$ lo que es imposible. Por tanto el problema no admite soluciones clásicas. Debe observarse que el segundo miembro $F \in C(\overline{B}_R)$. □

VI.4. Ejercicios

Los problemas que corresponden al curso 2002-2003 son exclusivamente los marcados con (*).

---

1 (*). Estúdiese por separación de variables la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & x \in B_a \\ u = f \quad & x \in \partial B_a, \end{aligned}$$

donde B_a es la bola centrada en el origen y de radio a en el plano, y $f(x, y)$ es de clase C^1 en la circunferencia de radio a, ∂B_a.

2 (*). Pruébese que si f en el problema anterior es sólo continua, la solución del problema de Dirichlet en la bola

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & x \in B_a \\ u = f \quad & x \in \partial B_a, \end{aligned}$$

existe y viene dada por la fórmula de Poisson,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi a}\int_{|y|=a} \frac{a^2 - |x|^2}{|y - x|^2}\, dS_y.$$

3. Se considera el sector $W = \{0 < r < a, 0 < \theta < \beta\}$. Estúdiese, por el método de separación de variables la solución del problema de contorno $\Delta u = 0$ en W, $u = 0$ en $\theta = 0, \beta$, mientras que se impone $u(a, \theta) = f(\theta)$ donde f es, por ejemplo, continua en

$0 \le \theta \le \beta$. Analícese el correspondiente problema reemplazando la condición Dirichlet, por la de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}(a, \theta) = g(\theta)$.

4 (*). Analícese el problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en el anillo plano $a < r < b$, bajo condiciones de Dirichlet $u = f$ en $r = a$, $u = g$ en $r = b$, f y g continuas. Utilícese el método de separación de variables.

5. Analícese por el método de separación de variables la solución del problema exterior de Dirichlet plano: $\Delta u = 0$ en $r > a$, $u = f$ en $r = a$, f continua, mientras que se impone la condición de que u esté acotada.

6. Si k es una constante positiva, hállense las soluciones radiales de la ecuación de Helmholtz $u_{xx} + u_{yy} = k^2 u$.

7. Hállese (separación de variables) la solución del problema plano $\Delta u = 0$ en $a < r < b$, $\alpha < \theta < \beta$, $u = 0$ en $\theta = \alpha, \beta$, $u = f$ en $r = a$, mientras $u = g$ en $r = b$, siendo f y g continuas.

8 (*). Pruébese que si u es armónica en una región Ω del plano, entonces u es C^∞.

9 (*). Pruébese que si u es armónica en una región Ω del plano, entonces u cumple el teorema de la media. Es decir, para toda bola cerrada $\bar{B} = \bar{B}_R(x_0) \subset \Omega$ se tiene,

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|y-x_0|=R} u(y)\, dS_y.$$

Pruébese que también,

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|y-x_0|\le R} u(y)\, dy.$$

10. Pruébese usando la fórmula de Poisson que toda función continua y periódica en $\mathbb{R}$, $f = f(\theta)$ puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos $p_n(\theta) = a_0 + \sum_1^N a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$.

11. Descríbase la estructura de los polinomios armónicos en el plano.

12. Una aplicación biyectiva $(P, Q) : \Omega \to \Omega_1$ y C^1 entre dos dominos del plano Ω, Ω_1 se dice conforme si preserva los ángulos de curvas incidentes. ¿Qué forma tienen tales transformaciones?. Pruébese que las transformaciones conformes preservan las funciones armónicas.

13 (*). (Desigualdad de Harnack). Sea u armónica en en $|x| < a$, continua hasta $|x| = a$ y no negativa. Pruébese que si $|\xi| < a$ entonces,

$$\frac{(a - |\xi|)}{(a + |\xi|)} u(0) \le u(\xi) \le \frac{(a + |\xi|)}{(a - |\xi|)} u(0).$$

14 (*). (Estimaciones del Gradiente). Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$, u armónica en Ω y sea $B = B_R(x_0) \subset \bar{B} \subset \Omega$. Prúebese que,

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{2}{R} \sup_{\partial B} |u|,$$

para $i = 1, 2$. Utilícese para ello que $\partial_i u$ es también armónica, junto con la propiead de la media y el teorema de la divergencia. Conclúyase que

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{2}{d(x_0, \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|.$$

15 (*). (Teorema de Liouville). Prúebese que si u es armónica y acotada en $\mathbb{R}^2$ es entonces constante (aplíquese el problema anterior a bolas con radio creciendo a infinito).

16 (*). Sea $u \in C^\infty(\Omega)$ con $x_0 \in \Omega$. La serie formal de Taylor de u en x_0 se define como

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!$ y $\partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} u$.

Prúebese que si u es armónica en un dominio Ω, $x_0 \in \Omega$, entonces, si $\overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$,

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha, \tag{0}$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en la tal bola $|x - x_0| \leq R$. Puede suponerse para ello que $x_0 = 0$ (¿Por qué?), recordar que u es de clase C^∞ y que en virtud a la fórmula de Poisson, tenemos:

$$u(x) = a_0 + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \text{ sen } n\theta), \tag{1}$$

que converge absoluta y unifermemente en $|x| \leq R$. Utilícese que las sumas parciales de (1) son polinomios, junto con la caracterización del polinomio de Taylor para concluir que (1) es en realidad la versión en polares de (0).

17 (*). (Principio del Máximo y términos gradiente). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una solución de:

$$\Delta u + \sum a_i \partial_i u = 0,$$

en Ω, donde se supone que los coeficientes $a_i(x)$ son acotados en Ω. Pruébese que:

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

18. (Teorema de Phragmén-Lindelöf). Sea Ω un dominio plano y acotado, $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ un punto de su frontera y sea u una función armónica en Ω, continua en $\bar{\Omega}$ execpto quizás en (x_0, y_0). Supóngase que $u(x, y) \leq M$ para $(x, y) \in \partial\Omega$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Si se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) \Big/ \log \left\{ \frac{2R^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} \right\} = 0,$$

donde $R > 0$ es tal que el dominio $\Omega \subset \left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\right\}$. Pruébese que también $u(x, y) \leq M$ en Ω.

Analícese con detalle el ejemplo:

$$u(x, y) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos\theta},$$

siendo r y θ las coordenadas polares de (x, y), $0 \leq r < 1$.
Indicación. Estúdiese la validez del principio del máximo para la función auxiliar $v(x, y)$ dada por la identidad:

$$u(x, y) = v(x, y) \log \frac{2R^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}.$$

19. ¿Es la función

$$\psi(r, \theta) = \mathrm{cotag}^{-1} \left(\frac{2r \text{ sen } \theta}{1 + r^2 - 2r \cos\theta} \right),$$

armónica en el disco unidad? Véase Weimberger, sección 25.

20. Sea Arg P la determinación del argumento con discontinuidad en el semieje real positivo. Sean A, B puntos de la circunferencia unidad ∂B_1. Pruébese que $\psi(P) =$ Arg $(P - B) -$ Arg $(P - A)$ es armónica y acotada en B_1. ¿Cuál es su comportamiento en la frontera? Estúdiese con detalle los comportamientos en los puntos A y B.

21 (*). Resuélvase los problemas de contorno:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < 1 \\ u(1, \theta) = \text{ sen }^3\theta + \text{ sen } \theta \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < 1 \\ u(1, \theta) = 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad u(1, \theta) = 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in B_4(O) \\ u(x, y) = x^4 & x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

22. Sea Q el rectángulo $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ y considére una función C^1 $f = f(x, y)$ en la frontera ∂Q que se anula en los vértices del mismo. Construir la solución del problema de Dirichlet:

$$\Delta u = 0 \quad x \in Q$$
$$u = f \quad x \in \partial Q,$$

por el método de separación de variables.

23. Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(x,1) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

24. Hallar la solución del problema $\Delta u = y(1-y) \operatorname{sen}^3 x$ en $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$, bajo condiciones Dirichlet homogéneas.

25. (Función de Green en el rectángulo). Hallar la solución formal del problema $\Delta u = -F(x,y)$ en el rectángulo $0 < x < \pi$, $0 < y < A$ y condiciones Dirichlet homogéneas.

26. Sea $G = G((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ la función de Green para el problema de Dirichlet en la círculo unidad. Bajo las equivalencias obvias, comprobar que se puede escribir en la forma,

$$G(z,z_1) = \frac{-1}{2\pi}\log|z-z_1| + \frac{1}{2\pi}\log|1-z\bar{z}_1| \qquad z, z_1 \in \mathbb{C}, \quad |z|, |z_1| < 1.$$

Si, por otra parte, $z = g(\zeta)$ es holomorfa en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y aplica biyectivamente Ω en el círculo unidad prúebese que

$$G_\Omega(\zeta,\zeta_1) = G(g(\zeta), g(\zeta_1)),$$

es una función de Green para el problema de Dirichlet en Ω.

27. Prúebese que la función de Green G_a para el problema de Dirichlet en la bola $B_a(0)$ toma la forma:

$$G_a(\bar{x},\bar{y}) = G(\frac{\bar{x}}{a},\frac{\bar{y}}{a}) = \frac{1}{2\pi}[-\log|\bar{x}-\bar{y}| + \log|\frac{\bar{y}}{a}||\bar{x}-\bar{y}^*|],$$

donde ahora $\bar{y}^* = a^2\dfrac{\bar{y}}{|\bar{y}|^2}$ es el simétrico de $\bar{y}$ con respecto a la circunferencia $|\bar{x}| = a$.

28. Estúdiese el comportamiento de la transformación bilineal

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z},$$

sobre el círculo $|z| < b$, $b > a > 0$. Usar el resultado para determinar la función de Green del problema de Dirichlet en una elipse.