CAPÍTULO V

LA ECUACIÓN DEL CALOR

V.1. Problema de valor inicial

Nos ocuparemos en primer lugar del estudio del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{P}$$

Las consideraciones de similaridad que siguen llevan al candidato a solución[1] de (P).

Primeramente obsérvese que si $u(x,t)$ resuelve,

$$u_t = u_{xx}, \tag{1}$$

entonces,

$$v = u(\pm x + y, t + \tau),$$

es también solución cualesquiera que sean $y, \tau \in \mathbb{R}$.

Análogamente,

$$v_\lambda = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) \qquad \lambda > 0, \tag{2}$$

también es solución de (1) para todo $\lambda > 0$.

Si $\theta = \theta(x)$ es la función de Heaviside, $\theta(x) = 1$ para $t \geq 0$, $\theta(x) = 0$ para $t < 0$ un problema básico que se puede plantear (descartando los casos triviales) es,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \theta(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Como θ es invariante frente a cambios de escala, $\theta(x) = \theta(\lambda x)$, (2) y la hipotética unicidad de soluciones nos llevan a conjeturar,

$$u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) = u(x,t) \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

Eligiendo $\lambda = 1/t$ en (4) llegamos a

$$u(x,t) = u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1),$$

que nos sugiere buscar soluciones de (3) de la forma,

$$u(x,t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

[1]Más tarde se comprobará que salvo restricciones en la clase de las soluciones a tratar, (P) carece de la propiedad de unicidad de soluciones clásicas.

Poniendo $\zeta = x/\sqrt{t}$ llegamos fácilmente a:

$$\phi" + \frac{\zeta}{2}\phi' = 0,$$

bajo las condiciones,

$$\lim_{\zeta\to-\infty} \phi(\zeta) = 0 \qquad \lim_{\zeta\to+\infty} \phi(\zeta) = 1.$$

Teniendo en cuenta el valor de la integral gaussiana $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\ ds = \sqrt{\pi}$ obtenemos,

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{s^2}{4}}\ ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta/2} e^{-z^2}\ dz,$$

alternativamente,

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\ (\frac{\zeta}{2}),$$

donde *Erf* es la función error,

$$\mathrm{Erf}\ (\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-z^2}\ dz.$$

Por tanto, un candidato a solución de (3) es,

$$u_\theta(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4t}} e^{-z^2}\ dz.$$

Propiedad. *$u_\theta \in C^\infty\{t > 0\}$, resuelve (1) y*

$$\lim_{t\to 0+, x\to x_0} u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio. Pruébese que para cada $\tau \in [0,1]$ existe una curva Γ en $t > 0$ tal que:

$$\lim_{P\to(0,0), P\in\Gamma} u = \tau.$$

Sea ahora $I = [a,b]$, χ_I su función característica. Es inmediato que una solución de (1) para el dato $f = c\chi_I$ es,

$$u = c\{u_\theta(x-b,t) + u_\theta(x-a,t)\},$$

es decir,

$$u = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-b)/\sqrt{4t}}^{(x-a)/\sqrt{4t}} e^{-z^2}\ dz.$$

Por otra parte, si $f \in C[a,b]$ y la consideramos extendida por 0 a $\mathbb{R}$ podemos dar una aproximación poligonal de la forma,

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{y}_i)\chi_{I_i}(x),$$

con $y_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, $\bar{y}_i \in I_i$. Una solución correspondiente a f_n es

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{y}_i) u_{\chi_{I_i}}(x,t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\bar{y}_i)}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-y_i)/\sqrt{4t}}^{(x-y_{i-1})/\sqrt{4t}} e^{-z^2}\, dz \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} f(\bar{y}_i) e^{-(x-\tilde{y}_i)^2/4t} h, \end{aligned}$$

con $\tilde{y}_i \in I_i$. Para $t > 0$ fijado, el teorema de Bliss nos dice que,

$$u_n \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} f(\bar{y}_i) e^{-(x-\bar{y}_i)^2/4t} h, \tag{5}$$

cuando $n \to \infty$. Tomando límites en (5) cuando $n \to +\infty$ obtenemos:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y)\, dy. \tag{6}$$

Nada más natural que proponer (6) –fórmula de Poisson– como candidato a solución de (P). Por otro lado, y usando las ideas de separación de variables (Ejercicio unas líneas más abajo), si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ un posible candidato a solución del problema n-dimensional:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P}$$

es,

$$u(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy. \tag{7}$$

Ejericicio.

Si $u_1(x_1,t), \ldots, u_n(x_n,t)$ son soluciones de (1) verfíquese que

$$u(x,t) = u_1(x_1,t) \ldots u_n(x_n,t)$$

es solución de $u_t = \Delta u$.

Conviene fijar las notaciones:

$$C_b^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^k(\mathbb{R}^n) : \sup |\partial^\alpha f(x)| < \infty \quad |\alpha| \le k\},$$

$$C^{k,k/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) = \{u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) : \partial_x^\alpha \partial_t^j u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \quad |\alpha| + 2j \le k\}.$$

Teorema. *Para $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ representemos por*

$$u = \mathcal{K}f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy.$$

Entonces

(1) *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ define una solución clásica de (P), es decir,*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0).$$

(2) *(Conservación de la energía) Si además $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \qquad t > 0.$$

(3) *(Comparación con el dato inicial)*

$$\inf f \le u(x,t) \le \sup f \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

(4) *Si $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ entonces $u \in C_b^{k,k/2}(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$. Más aún, para $|\alpha| + 2j \le k$, $v = \partial_x^\alpha \partial_t^j u$ resuelve,*

$$\begin{cases} v_t = \Delta v & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ v(x,0) = \partial_x^\alpha(\Delta^j f(x)) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Demostración. Nos limitaremos a las ideas principales. Denotemos por,

$$K(x,y,t) = (\sqrt{4\pi t})^{-n/2} e^{-|x-y|^2/(4t)}$$

al núcleo del calor. Fijemos (x_0,t_0), $t_0 > 0$ y $\varepsilon > 0$ pequeño. Para todo α, j se tiene,

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j K(x,y,t) = P(\frac{1}{t}, x-y) e^{-|x-y|^2/(4t)}$$

donde $P = P(\tau, z)$ es un cierto polinomio,

$$P(\tau,z) = \sum_{r,\beta} a_{r,\beta} \tau^r z^\beta.$$

De ahí,

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^j K(x,y,t)| \le \sum_{r,\beta} |a_{r,\beta}| \frac{1}{t^r} |x-y|^{|\beta|} e^{-|x-y|^2/(4t)}.$$

Cuando $|t-t_0|, |x-x_0| \le \varepsilon$, tenemos,

$$\sum_{r,\beta} |a_{r,\beta}| \frac{1}{t^r} |x-y|^{|\beta|} \le \sum_{r,\beta} |a_{r,\beta}| \frac{1}{(t_0-\varepsilon)^r} \sum_{s \le |\beta|} \binom{|\beta|}{s} (|x_0| + \varepsilon)^{|\beta|-s} |y|^s.$$

Por otro lado, para todo $\nu < 1$, $\nu \sim 1$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|y-x|^2 \geq |y|^2 - 2(|x_0| + \varepsilon)|y| \geq \nu |y|^2 - \delta \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto,

$$e^{-|x-y|^2/(4t)} \leq e^{\delta/(4(t_0+\varepsilon))} e^{-\nu|y|^2/(4(t_0+\varepsilon))}.$$

De ahí, para un cierto polinomio de coeficientes positivos Q,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \partial_t^j K(x,y,t)||f(y)|\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} Q(|y|) e^{-\nu|y|^2/(4(t_0+\varepsilon))}\,dy < \infty. \tag{8}$$

Esto prueba la regualridad de u. Los demás resultados se dejan como ejercicio (cf. [FJ]). $\square$

Observación.

Si f es medible y

$$|f(x)| \leq M e^{a|x|^2}, \tag{9}$$

$a > 0$, se sigue de (8) que $u = Kf$ define una solución clásica de (P) en $0 < t < 1/(4a)$ cumpliendo:

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0), \tag{10}$$

en los puntos de continuidad x_0 de f. Probémoslo. En efecto, $|f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon/2$ para $|y - x_0| \leq \delta$. Así,

$$|u(x,t) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{n/2}} \int_{|y-x|\geq \delta/2} e^{-|y-x|^2/(4t)} |f(y) - f(x_0)|\,dy,$$

siempre que $|x - x_0| \leq \delta/2$ (el primer sumando corresponde a una integración sobre $B_{\delta/2}(x)$). Podemos ahora acotar $|f(y) - f(x_0)| \leq M_1 e^{a|y|^2}$, con lo que la segunda integral se estima en la forma,

$$\begin{aligned} &\frac{M_1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{|\zeta|\geq \delta/(2\sqrt{4t})} e^{(4ta-1)|z|^2 + 2a\sqrt{4t}|z| + |x|^2}\,dz \\ &\qquad \leq \frac{M_1 e^{(|x_0|+\delta/2)^2}}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{|\zeta|\geq \delta/(2\sqrt{4t})} e^{-\frac{1}{2}|z|^2 + |z|}\,dz \to 0, \end{aligned}$$

cuando $t \to 0+$. $\square$

Observación. Es inmediato comprobar que si en (P), f tiene soporte compacto, $f \geq 0$, por ejemplo ($f \neq 0$) entonces $u = \mathcal{K}f(x,t) > 0$, para todo x en $t > 0$. Comprobaremos que lo mismo ocurre cuando tratamos con problemas de contorno (donde hay unicidad). Esto significa que las perturbaciones iniciales se propagan con velocidad infinita.

Ejercicio. Pruébese la estimación:

$$|K(x,y,t)| \leq \Big(\frac{n}{2\pi e}\Big)^{n/2} \frac{1}{|x-y|^n}.$$

V.2. El problema perturbado

Si consideramos el problema,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x,t) & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P}$$

el método de variación de las constantes (ver Capítulo IV) nos lleva a que un candidato a solución de (P) es:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4(t-\tau))} F(y,\tau)\; dy d\tau. \tag{11}$$

Justificar que (11) es una solución clásica de (P) es más delicado y requiere cierta regularidad de F en x. La demostración del siguiente teorema se omite (puede consultarse el libro de Mijailov, "Ecuaciones en Derivadas Parciales", Mir, Moscú).

Teorema. *Sea $F, \partial_x F \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Entonces (11) define una solución del problema (P).*

V.3. Problemas de valor incial y contorno

El modelo físico que da lugar a la ecuación del calor sugiere plantearse el problema de contorno y valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l \\ \mathcal{B}_0 u = \alpha(t), \mathcal{B}_l u(t) = \beta(t) & t > 0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_l$ son los operadores de contorno de Dirichlet, Neumann o Robin (cf. Capítulo IV). La regularidad hasta la frontera precisará también de condiciones de compatibilidad adecuadas. En versión n-dimensional, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ el problema es,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x,t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \Omega \\ \mathcal{B} u = \alpha(x,t) & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{P}$$

donde en este caso $\mathcal{B}u = u$ (Dirichlet), $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ (Neumann), $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x,t)u$ (Robin, $b \geq 0$).

El siguiente resultado admite la correspondiente contrapartida unidimensional (donde es posible introducir condiciones mixtas). Debe resaltarse la *regularidad* que se impone a las soluciones.

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y C^1 de $\mathbb{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial y de contorno (P) admite a lo más una solución clásica $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T))$.*

Demostración. Basta con estudiar el comportamiento de la integral,

$$\int_\Omega u^2(x,t)\; dx\,. \qquad \square$$

Usando las ideas de simetría el problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{D}$$

admite una solución clásica u siempre que f sea mínimamente regular. Basta extender f de forma impar y 2π periódica $\bar{f}$ a $\mathbb{R}$ y después aplicar la fórmula de Poisson:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \bar{f}(y)\, dy.$$

Si $f \in C[0,\pi]$, la restricción de $\bar{u}$ a $0 < x < l$ define una solución C^∞ en $t > 0$ de forma que $u \to f$ cuando $t \to 0+$ en uniformemente sobre compactos de $(0,l)$. En realidad, $\bar{u}$ está definida en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$. Las condiciones de compatibilidad $f(0) = f(l) = 0$ implican que u es una solución clásica que ajusta uniformemente con el dato f cuando $t \to 0+$. En el caso Neumann,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{D}$$

basta tener $f \in C^1[0,l]$ y las condiciones de compatibilidad $f'(0) = f'(l) = 0$ para tener una solución clásica única que es C^1 en $t \geq 0$ (siempre es C^∞ en $t > 0$.

V.4. Principios del máximo para la ecuación del calor

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$ usaremos la siguiente notación. $Q_T = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Por otro lado $\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ (la frontera parabólica de Q_T). En los enunciados que siguen y para abreviar escribiremos $\mathcal{L}u = u_t - \Delta u$ para representar el operador del calor.

Teorema (Principio del máximo débil). *Sea $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ tal que:*

$$\mathcal{L}u \leq 0$$

en Q_T. Entonces,

$$\sup_{Q_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} .$$

Una consecuencia importante del teorema es el llamado principio de comparación.

Corolario. *Sean u, $v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ tales que:*

$$\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v \quad \text{para } (x,t) \in Q_T \qquad u \leq v \quad \text{en cada } (x,t) \in \Gamma_T.$$

Entonces:

$$u \leq v \qquad (x,t) \in Q_T.$$

En particular, para cada F, f y α el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x,t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = \alpha(x,t) & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

admite a lo más una solución clásica $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

Observación. Nótese que se ha mejorado, para el problema de Dirichlet, la regularidad exigida a las soluciones a los efectos de la unicidad.

El principio débil del máximo puede refinarse al extremo de que una solución clásica u de $\mathcal{L}u = 0$ en Q_T sólo puede tomar los extremos en la frontera parabólica, salvo que sea constante (un libro especializado sobre el tema es Protter y Weimberger, "Maximum Principles in Differential Equations", Prentice Hall). En las propiedades que siguen $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ designará un dominio mientras $\mathcal{L}u = u_t - \Delta u$.

Teorema (Principio Fuerte del Máximo). *Sea $u \in C^2(E)$ tal que:*

$$\mathcal{L}u \leq 0 \qquad (x,t) \in E,$$

en tanto que $u \leq M$ en E para cierta constante M. Si existe $P_1 = (x_1, t_1) \in E$ tal que $u(x_1, t_1) = M$ entonces $u = M$ para todos los hiperplanos $t = t_0$ que puedan conectarse en E por segmentos verticales $x = x_0$ con la componente conexa en E de $\{t = t_1\} \cap E$ que contiene a P_1.

Observaciones. La conclusión del principio fuerte del máximo sigue siendo válida si el operador del calor se substituye por otros operadores parabólicos más generales (véase la referencia de Protter y Weimberger). En particular para:

$$\mathcal{L}u = u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + h(x,t)u,$$

donde los coeficientes b_i y h son, por ejemplo, continuos y acotados en $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, el coeficiente del término de orden cero cumple:

$$h \geq 0 \qquad \text{en } E,$$

mientras al supremo se le impone la restricción de signo:

$$M \geq 0.$$

Véanse más detalles en la sección de problemas.

Un corolario inmediato del principio fuerte del máximo es el llamado principio de comparación fuerte (problema de Dirichlet).

Teorema (Principio de comparación fuerte). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, $T > 0$, u, $v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ tales que:*

$$\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v \qquad \text{en } Q_T,$$

junto con,

$$u \leq v \qquad \text{sobre } \Gamma_T.$$

Entonces se da una y sólo una de las siguientes opciones: o bien $u = v$ en Q_T o bien $u(x,t) < v(x,t)$ para todo $(x,t) \in Q_T$.

Tenemos también el siguiente resultado para el problema de Dirichlet unidimensional.

Teorema. *Sea $f \in C[0,l]$ tal que $f(0) = f(l) = 0$. Entonces el problema de Dirichlet para la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ admite una única solución clásica $u \in C^{2,1}((0,l) \times (0,+\infty)) \cap C([0,l] \times [0,+\infty))$. Si además $f \geq 0$ entonces o bien $u \equiv 0$ o bien $u > 0$ en $(0,l) \times (0,+\infty)$.*

Ejericio. En las condiciones de regularidad del teorema de comparación sea u una solución clásica del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \qquad x \in \Omega, t > 0 \\ u &= f \qquad t = 0 \\ \mathcal{B}u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Demuéstrese que:

$$|u(x,t)| \leq \sup_{\Omega} |f|.$$

V.5. Principios del máximo en dominios no acotados

El siguiente teorema señala una clase de funciones en la que es posible garantizar la unicidad de soluciones para el problema de Cauchy.

Teorema. *Supongamos que $u \in C^{2,1}(0 < t < T) \cap C([0,T])$ satisface:*

$$\begin{aligned} u_t &\leq \Delta u \qquad x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

que satisface la condición de crecimiento exponencial:

$$u(x,t) \leq M e^{a|x|^2}.$$

Entonces,

$$u(x,t) \leq \sup f \ .$$

Una consecuencia del teorema es la siguiente propiedad de unicidad. Si u_1, u_2 son soluciones del problema de valor incial

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \qquad x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{P}$$

satisfaciendo la condición de crecimiento

$$|u(x,t)| \leq M e^{a|x|^2}, \tag{C}$$

quizás para diferentes a's y M's, entonces $u_1 = u_2$. En particular (P) sólo admite, si $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, una solución acotada: la solución de Poisson. Como regla general, para problemas en dominios no acotados, condiciones de crecimiento como (C) juegan el papel de condiciones de contorno en "el infinito".

Ejercicios del Capítulo V

1. Se define la *función error* como sigue:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\ dy.$$

Utilizando dicha función dése una solución de los problemas de Cauchy para la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en $\mathbb{R}$ con datos iniciales: a) $f(x) = 1$ si $|x| < l$ y $f(x) = 0$ si $|x| > l$, b) $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = 3$ si $x < 0$, c) $f(x) = \chi_I$, e. d., la función característica de un intervalo arbitrario $I = [a, b]$.

2. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que Ω está aislado térmicamente y posee una fuente calorífica con densidad $-f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. La evolución de la temperatura $u(x,t)$ vendrá dada por la solución del problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f(x), \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_o(x), \quad x \in \Omega,\\
&\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,
\end{aligned}$$

siendo $u_o(x)$ la temperatura inicial. Las configuraciones estacionarias de la temperatura cumplirán entonces el problema de contorno:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega,\\
&\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{P}$$

¿Serán únicas las soluciones del problema (P)?. Admitamos que $f \in C(\overline{\Omega})$ y supongamos que todas las soluciones $u(x)$ de (P) están en $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Demuéstrese que una condición necesaria para que (P) admita una solución es que:

$$\int_\Omega f\ dx = 0.$$

3. Hállense las soluciones estacionarias del problema:

$$\begin{cases} c\rho u_t = k u_{xx} + \alpha u, & t > 0, 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

¿ Para qué valores de α serán únicas las soluciones? En todo momento se supondrá que las soluciones del problema son C^2 en $[0,l]$.

4. Supongamos que las soluciones del problema:

$$\begin{cases} c\rho A u_t = k A u_{xx} - \mu P(u - T_o), & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x,0) = u_o(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

son C^2 en $[0,l]$ y $t \geq 0$. Demuéstrese que la temperatura $u(x,t)$ se estabiliza en media cuadrática en torno al valor T_o, es decir:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^l (u(x,t) - T_o)^2 \, dx = 0.$$

¿Cuántas soluciones estacionarias admite el problema? ¿Cuántas soluciones homogéneas (e. d., no dependientes de x) admite el problema?

5. Hállese una solución del problema de Cauchy para la ecuación del calor unidimensional con dato inicial $u(x,0) = x^2$. Una guía para hacerlo es la que sigue. Prúebese que si $u(x,t)$ es una hipotética solución entonces $u_{xxx}(x,t)$ también satisface la ecuación del calor con dato $g(x) \equiv 0$. Conclúyase de aquí (¡ilegalmente !) que $u_{xxx}(x,t) \equiv 0$ la forma general de una posible solución.

6. La misma cuestión que en el problema anterior con el dato $f(x) = e^{-x}$.

7. Resuélvase el problema de Cauchy para la ecuación del calor: $u_t = k u_{xx} - bt^2 u$, $u(x,0) = \phi(x) \in C_b(\mathbb{R})$. Para ello hágase un cambio adecuado de la forma $u(x,t) = h(t)v(x,t)$.

8. Sea $f(x)$ acotada y continua a trozos en $\mathbb{R}$, e. d., exiten $x_1 < \ldots, < x_N$ tales que $f_{|(-\infty,x_1)}$, $f_{|(x_1,x_2)}, \ldots f_{|(x_{N-1},x_N)}$, $f_{|(x_N,+\infty)}$ son continuas, siendo los límites (que supondremos existen) $f(x_i-), f(x_i+)$ finitos. Si:

$$u(x,t) = \mathcal{K}(f)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, dy,$$

hállense los límites:$\lim_{t\to 0+} u(x_i,t)$.
Indicación. Estúdiese con detalle el caso en que $f(x) = \theta(x) = 1$ si $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ si $x < 0$.

9. Calcúlese la solución del problema:

$$u_t = \Delta u \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$
$$u(x,0) = e^{\alpha|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

que se obtiene por medio de la fórmula de Poisson.

10. Sea $f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ una función radialmente simétrica, es decir $f(x) = h(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Prúebese entonces que la función:

$$u(x,t) = \mathcal{K}(f)(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy,$$

es también radialmente simétrica con respecto a x.

11. (*Decaimiento de la Energía en la Ecuación del Calor*). Sean $u_i(x,t) \in C^{2,1}([0,l] \times [0,+\infty))$, $i = 1,2$ soluciones del problema de Dirichlet:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < l, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t).$$

Pruébese la identidad $u_1 = u_2$. Para ello consideérese la diferencia $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ y pruébese que la función:

$$E(t) = \int_0^l w(\xi,t)^2 \, d\xi,$$

es no creciente para $t \geq 0$.

12. Considérse el problema de Dirichlet homogéneo:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(x,0) = 4x(1-x) \quad 0 < x < 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0,$$

y admitamos que admite una solución $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,+\infty) \cap C([0,1] \times [0,+\infty))$. Pruébese que $0 < u(x,t) < 1$ para todo $t > 0$. Pruébese que $u(x,t) = u(1-x,t)$ para todo (x,t).