CAPÍTULO IV

SEPARACIÓN DE VARIABLES
SERIES DE FOURIER

El objetivo del capítulo es introducir el método de separación de variables, de larga tradición en la física matemática desde finales del siglo XVIII. Supondremos que el intervalo de variación de la variable espacial es $(0, \pi)$. Esto no reviste pérdida de generalidad en los problemas que se estudiarán.

IV.1. Ecuación de ondas

El problema de Dirichlet para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{P}$$

puede tratarse con el método de separación de variables que describimos ahora. El buscar soluciones de la forma:

$$u = X(x)T(t),$$

conduce a la ecuación:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}.$$

Las condiciones de frontera al problema de contorno:

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0 \\ &X(0) = X(\pi) = 0, \end{aligned}$$

que sólo proporciona soluciones no triviales para los valores $\lambda_n = n^2$ a los que corresponden las soluciones $X_n(x) = A_n \operatorname{sen} nx$. Los mismos valores de $\lambda = n^2$ permiten determinar las funciones de t, $T_n(t) = B_n \cos nct + C_n \operatorname{sen} nct$. Obtenemos así la familia infinita de soluciones particulares:

$$X_n T_n = (a_n \cos nct + b_n \operatorname{sen} nct) \operatorname{sen} nx \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Por este simple procedimiento podemos determinar la solución de la familia finito dimensional de datos iniciales,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \operatorname{sen} nx \\ g &= \sum_{n=1}^{N} \beta_n \operatorname{sen} nx. \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Tal solución es,

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \text{ sen } nct) \text{ sen } nx.$$

La misma estrategia plantea el problema de representar funciones arbitrarias f y g, definidas en $[0,\pi]$, en forma de series trigonométricas:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ sen } nx$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{ sen } nx.$$

De hecho, los resultados que establecermos más tarde permiten concluir que si $f \in C^2[0,\pi]$, $g \in C^1[0,\pi]$ cumplen las condiciones de compatibilidad $f(0) = f''(0) = f(\pi) = f''(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$ entonces tal representación es posible siendo la convergencia uniforme (la convergencia es de hecho mejor), pudiendo asimismo integrar término a término en la serie para g siendo: podemos representarlas,

$$G(x) := \int_0^x g(s)\ ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} \cos nx,$$

uniformemente convergente en $[0,\pi]$.

Tomando límites en u_N cuando $N \to \infty$ obtenemos la serie formal:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \text{ sen } nct) \text{ sen } nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nct \text{ sen } nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \text{ sen } nct \text{ sen } nx = u_1 + u_2. \end{aligned} \tag{S}$$

Dicha serie constituye la solución de (P). En efecto:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nct \text{ sen } nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ sen } n(x+ct) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ sen } n(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\{f(x+ct) - f(x-ct)\}, \end{aligned}$$

luego u_1 es C^2 y define la parte de la solución de (P) correspondiente a tomar $g = 0$. Análogamente,

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \text{ sen } nct \text{ sen } nx = \frac{1}{2c}\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \cos n(x+ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \cos n(x-ct)\} \\ &= \frac{1}{2c}\{G(x+ct) - G(x-ct)\}. \end{aligned}$$

De nuevo u_2 es C^2 y define la solución de (P) correspondiente a $f = 0$, aunque –como antes– no estemos autorizados a derivar dos veces la serie. Por tanto, (S) representa la solución. Debe advertirse sin embargo que la serie obtenida no puede en general derivarse dos veces término a término (ello requiere regularidad extra en los datos f y g).

En caso de condiciones Neumann,

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \tag{N}$$

junto con datos $f \in C^2[0,\pi]$, g cumpliendo las correspondientes condiciones de compatibilidad se requieren las representaciones:

$$\begin{aligned}
f &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \\
g &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos nx \\
G &= \int_0^x g(s)\; ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} \cos nx.
\end{aligned}$$

Los resultados posteriores nos permitirán igualmente establecer la validez y convergencia uniforme de las mismas. El método de separación de variables, usado en las líneas de la primera parte, nos conducirá a la siguiente expresión formal de la solución,

$$u = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nct + b_n \text{ sen } nct) \cos nx.$$

Teniendo en cuenta las representaciones trigonométricas se pueden deducir los coeficientes para llegar a:

$$u = \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \text{ sen } nct) \cos nx. (S)$$

Manipulando la serie volveremos a obtener:

$$u = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\{G(x+ct) + G(x-ct)\},$$

que es la fórmula de D'Alambert del Capítulo anterior.

IV.2. Series de Fourier: introducción

El método de separación de variables plantea de forma muy natural el siguiente problema. Dada una función $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ determinar coeficientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tales que,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx. \tag{1}$$

Como se pretende que (1) se satisfaga al menos puntualmente es natural que supongamos de partida que f es 2π-periódica. Usaremos $C^k(T)$, $L^2(T)$ para respresentar a las funciones 2π-periódicas que son C^k o que pertenecen a $L^2(-\pi,\pi)$.

Que (1) sea verosímil requiere resolver primero una cuestión fundamental: la determinación de los coeficientes en términos de f. Las identidades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \; dx = \pi\delta_{nm}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \; dx = 0,$$

(n, $m \in \mathbb{N}$ cualesquiera) son cruciales a este respecto. Multiplicando ambos miembros de (1) por $1 = \cos 0x$, $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$, respectivamente, integrando en $[-\pi,\pi]$ y permutando formalmente la integral y la serie, obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \; dx.$$

La forma de calcular los coeficientes tiene mucho que ver con el cómputo de las coordenadas de un vector x en un espacio euclídeo $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimensión N con respecto a una base ortonormal $\{e_1,\dots,e_N\}$. En efecto:

$$x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n,$$

donde $x_n = \langle x, e_n\rangle$. En el caso de las series de Fourier deberemos considerar un espacio adecuado de funciones con el producto escalar,

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\; dx,$$

mientras el sistema ortonormal es $\{1/\sqrt{2\pi}, \{1/\sqrt{\pi}\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}, \{1/\sqrt{\pi}\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Para poner en orden estas ideas desarrollamos a continuación algunos hechos básicos sobre espacios de Hilbert, la versión infinitodimensional de los espacios euclídeos.

Ejercicio. Hallar la serie de Fourier de la función $f(x) = x$.

IV.3. Espacios de Hilbert

Sea H un espacio vectorial (real o complejo). Un producto escalar (real) en H es una aplicación bilineal $b : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) $\forall x \in H : b(x,x) \geq 0$ y $b(x,x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
(2) $\forall x, y \in H : b(x,y) = b(y,x)$ (b es simétrica).

En el caso complejo b toma valores complejos, $\forall x \in H$, $b(\cdot,x)$ y $\overline{b(x,\cdot)}$ son lineales (b se dice sesquilineal), se da (1) mientras (2) se remplaza por,

(2)' $\forall x, y \in H : b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ (b es hermítica).

Se suele representar $b(x,y) = \langle x,y\rangle$. Dos vectores x, y se dicen ortogonales si $\langle x,y\rangle = 0$. Se introduce la longitud (módulo) $|x|$ de x como:

$$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Se tienen inmediatamente los teoremas del coseno, de pitágoras y las identidades del paralelogramo y de polarización (x, y son arbitrarios en H)

$$\begin{aligned}
&|x \pm y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \pm 2\Re\langle x,y\rangle\\
&|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \quad \text{si y sólo si} \quad \langle x,y\rangle = 0\\
&|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2\\
&\Re\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{|x+y|^2 - |x-y|^2\}\\
&\Im\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{|ix-y|^2 - |ix+y|^2\},
\end{aligned}$$

($\Re z$, $\Im z$ las partes real e imaginaria de $z \in \mathbb{C}$). Otra consecuencia de las propiedades del producto escalar es la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \le |x||y|, \tag{2}$$

para x, y arbitrarios. En efecto, descartamos los casos triviales $x = 0$, $\langle x,y\rangle = 0$ y suponemos que $|x| = 1$. Hallamos una base ortonormal de $\mathrm{span}\{x,y\}$. Llamamos $u_1 = x$, $u_2 = (y - \langle x,y\rangle x)/|y - \langle x,y\rangle x|$ y fácilmente obtenemos:

$$y = \langle x,y\rangle u_1 + |y - \langle x,y\rangle x|u_2,$$

de donde,

$$|y|^2 = |\langle x,y\rangle|^2 + |y - \langle x,y\rangle x|^2,$$

que implica (2).

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce la de Minkowsky,

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

Por tanto, todo espacio H con un producto interior $b = \langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio normado con respecto al módulo $|\cdot|$. H es un espacio de *Hilbert* si es completo con respecto a $|\cdot|$.

El ejemplo fundamental de espacio de Hilbert es:

$$l_2 = \{\{x_n\} : \sum |x_n|^2 < +\infty\},$$

donde las $\{x_n\}$ pueden ser reales o complejas. En este caso $\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle = \sum x_n y_n$ ($\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle = \sum x_n \bar{y}_n$ en el caso complejo).

Un segundo ejemplo importante es $L^2(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible:

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) : u \text{ es medible}, \quad |u|^2 \text{es integrable-Lebesgue}\}.$$

Se hace la identificación $f = g$ si las funciones sólo difieren en un conjunto de medida cero. El producto escalar es:

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \left(\text{resp. } \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx\right).$$

Conviene ahora recordar algunas propiedades elementales.

Proposición. *Sea* $\sum x_n$ *una serie en un espacio de Hilbert* H *tal que* $\sum |x_n|$ *converge. Entonces* $\sum x_n$ *también convergente y:*

$$|\sum x_n| \leq \sum |x_n|.$$

Tal serie se dirá absolutamente convergente.

Si por otra parte, $\sum x_n$ *es cualquier serie convergente a* $x \in H$*, entonces:*

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum x_n, y\rangle = \sum \langle x_n, y\rangle,$$

para cada $y \in H$*.*

Nuestro objetivo más inmediato es dar sentido a la serie de Fourier de una función 2π-periódica f. Un primer resultado en esta dirección es el siguiente.

Teorema de la proyección. *Sea* H *un espacio de Hilbert,* $M \subset H$ *un subespacio cerrado,* $M \neq H$*. Entonces, para cada* $x \in H$ *existe un* único $y \in M$ *tal que:*

$$|x - y| = dist\ (x, M). \tag{A}$$

Además

(1) $x - y \in M^\perp$ *donde* $M^\perp = \{z : \forall y_1 \in M\ ,\ \langle z, y_1\rangle = 0\}$

(2) *La aplicación* $\pi : H \to H$ *que a* $x \to y := \pi(x)$ *es lineal y continua con* $\|\pi\| = 1$*.*

Observaciones. a) El teorema asegura la existencia de la "mejor aproximación" $y = \pi(x)$ de x por elementos de y. $\pi(x)$ se llama la proyección ortogonal de x sobre M.

b) Si M es finitodimensional, $M = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ con $\{e_1, \dots, e_N\}$ ortonormal no es difícil comprobar que $y = \pi(x) = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, $x_i = \langle x, e_i\rangle$. En efecto, para escalares arbitrarios $\{y_i\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} |x - \sum_{i=1}^N y_i e_i|^2 &= |x - \sum_{i=1}^N x_i e_i|^2 + |\sum_{i=1}^N (x_i - y_i) e_i|^2 \\ &= |x - \sum_{i=1}^N x_i e_i|^2 + \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2 \\ &\geq |x - \sum_{i=1}^N x_i e_i|^2. \end{aligned}$$

La diferencia entre el último y el primer término de la cadena de desigualdades es precisamente: $\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2$. Se hace mínimo (método de los *mínimos cuadrados*) para la elección $x_i = y_i$. Obsérvese que $x - \pi(x)$ es obviamente ortogonal a M y por eso se tiene:

$$|\pi(x)|^2 = \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \leq |\pi(x)|^2 + |x - \pi(x)|^2 = |x|^2.$$

c) Hemos probado que para cualquier subespacio cerrado $M \subset H$, H admite la descomposición:

$$H = M \oplus M^\perp,$$

siendo la suma directa topológica (véase H. Brezis, "Análisis Funcional y Aplicaciones", Alianza, 1985).

Una consecuencia de la observación b) es la siguiente propiedad general.

Proposición (Método de los mínimos cuadrados). *Sea M un subespacio cerrado propio de H, $x \in H$. Entonces, $y \in M$ satisface:*

$$|x - y| = dist\ (x, M).$$

si y sólo si $x - y \in M^{\perp}$.

Demostración. Para $y_1 \in M$ se tiene:

$$|x - y_1|^2 = |(x - y) + (y - y_1)|^2 = |x - y|^2 + |y - y_1|^2 \geq |x - y|^2.$$

□

Proposición (Desigualdad de Bessel). *Sea $\{e_i\}_{i \in I} \subset H$ una familia* ortonormal, *es decir, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, $|e_i| = 1$ para cada i. Entonces, para cada $x \in H$ la familia:*

$$\bar{x} = \sum_{i \in I} x_i e_i = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

es sumable en H. $\bar{x}$ se llama la serie de Fourier *de x y x_i es el* i-ésimo coeficiente de Fourier *de x con respecto a dicha familia. Además:*

$$|\bar{x}|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2 \leq |x|^2. \tag{3}$$

Demostración. Sea $J \subset I$ cualquier parte finita. Resulta que:

$$|x|^2 = |x - S_J|^2 + |S_J|^2 \geq |S_J|^2 = \sum_{i \in J} |x_i|^2,$$

con $S_J = \sum_{i \in J} x_i e_i$. Se deduce de ahí que:

$$\sum_{i \in I} |x_i|^2 \leq |x|^2.$$

Como:

$$|S_J|^2 = \sum_{i \in J} |x_i|^2,$$

y la familia $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < +\infty$ se tiene la convergencia de la familia propuesta a un valor $\bar{x}$ que cumple (3). De hecho,

$$|\bar{x}|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2.$$

□

Probaremos a continuación que el subespacio generado por una familia ortonormal $\{e_i\}_{i \in I}$ coincide con el de todas las series de Fourier de los elementos $x \in H$ con respecto a dicha familia.

Proposición. *Sea* $\{e_i\}_{i\in I}$ *una familia ortonormal en* H *y* M *el subespacio generado por la familia, es decir,*

$$M = \overline{\text{span}\{\{e_i\}_{i\in I}\}}. \tag{4}$$

Entonces,

$$M = \{\sum_{i\in I} x_i e_i : \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

Más aún, para cada $x \in H$ *se tiene que:*

$$\pi(x) = \bar{x} = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Observación.

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormal y M como en la proposición. Para $x \in H$, $\bar{x} \in M$ su serie de Fourier en $\{e_i\}_{i\in I}$. Nos preguntamos a cuántos otros x' les corresponde la misma serie de Fourier $\bar{x}$ que a x. Obviamente el conjunto de tales x's es:

$$x + M^{\perp}.$$

Los elementos de H vendrán caracterizados por su serie de Fourier sólo cuando $M^{\perp} = \{0\}$, es decir $M = H$. En este caso especial se tiene la siguiente definición.

Definición. Un sistema ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ se dice *completo* en H, también una *base de Hilbert* para H, si $M = H$.

Proposición. *Un sistema ortonormal* $\{e_i\}_{i\in I}$ *es completo si, para* x *arbitrario en* H, *de la propiedad:*

$$\forall i \in I \qquad \langle x, e_i \rangle = 0,$$

se sigue:

$$x = 0.$$

VI.4. Series de Fourier: primeras propiedades

La forma de calcular los coeficientes de la serie de Fourier de una función f nos ha llevado al espacio $L^2(T)$, que es un espacio de Hilbert. La familia

$$\{1/\sqrt{2\pi}, \{1/\sqrt{\pi}\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}, \{1/\sqrt{\pi}\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}\}$$

es ortonormal. Comprobaremos más tarde que es además completa. La siguiente propiedad es un caso particular de los resultados de la sección previa.

Proposición. *Para $f \in L^2(-\pi,\pi)$ su serie de Fourier converge en $f \in L^2(-\pi,\pi)$ a una función $\bar{f}$,*

$$\bar{f} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx.$$

Además,

$$|\bar{f}|_2^2 = \pi\{2a_0^2 + \sum a_n^2 + b_n^2\}.$$

Si $g \in L^2(-\pi,\pi)$ es otra función con serie Fourier,

$$\bar{g} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \text{ sen } nx,$$

entonces,

$$\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle_2 = \pi\{2a_0\alpha_0 + \sum a_n\alpha_n + b_n\beta_n\}.$$

Observación.

Si $\bar{f}$ es la serie de Fourier de $f \in L^2(-\pi,\pi)$, con suma parcial N-ésima S_N, entonces (desigualdad de Schwarz)

$$|\bar{f} - S_N|_{L^1} = \langle |\bar{f} - S_N|, \chi_{[-\pi,\pi]}\rangle_2 \leq \sqrt{2\pi}|\bar{f} - S_N|_2,$$

luego $\lim S_N = \bar{f}$ en L^1 lo que significa que la serie de Fourier $\bar{f}$ de f puede ser integrada término a término y, para cada a, $x \in [-\pi,\pi]$, se tiene:

$$\int_a^x \bar{f}(x)\, dx = a_0(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos na) + \frac{a_n}{n}(\text{ sen } nx - \text{ sen } na).$$

En el §6 se demuestra el siguiente resultado que enunciamos ahora a los efectos de establecer el teorema de completitud.

Teorema. *Sea $f \in C(T)$ continua tal que existe la derivada f' excepto quizás en un número finito de puntos, con $f' \in L^2(T)$ (por ejemplo, f es C^1 a trozos). Entonces,*

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx \qquad \text{(uniformemente)},$$

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \text{ sen } nx \qquad (\text{en } L^2).$$

Teorema de Completitud. *Si $f \in L^2(T)$, entonces f es la suma de su serie de Fourier. En particular, para todo par de funciones f, $g \in L^2(-\pi, \pi)$ con desarrollos de Fourier,*

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx,$$

$$g = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \text{ sen } nx,$$

se tienen (identidades de Parseval):

$$|f|_2^2 = \pi\{2a_0^2 + \sum a_n^2 + b_n^2\},$$

$$\langle f, g\rangle_2 = \pi\{2a_0\alpha_0 + \sum a_n\alpha_n + b_n\beta_n\}.$$

Demostración. Por la acción combinada de los teoremas de Lusin (cf. Anexo) y Weierstrass tenemos que

$$f = \lim f_n \qquad (L^2),$$

con f_n un polinomio. Si $p = p(x)$ es, por ejemplo un polinomio, y definimos:

$$p_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{p(\varepsilon-\pi)}{\varepsilon}(x+\pi) & -\pi \leq x \leq -\pi+\varepsilon \\ p(x) & -\pi+\varepsilon < x < \pi-\varepsilon \\ \frac{p(\pi-\varepsilon)}{\varepsilon}(\pi-x) & \pi-\varepsilon \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

entonces $p_\varepsilon \to p$ en L^2 cuando $\varepsilon \to 0+$. Esto significa que podemos suponer que los f_n son C^1 a trozos, 2π-periódicos y su serie de Fourier converge uniformemente. Sea $S_N^{(n)}$ la suma parcial N-ésima de la serie de Furier de f_n. Tenemos que para $\varepsilon > 0$ arbitrario:

$$|f - f_{n_\varepsilon}|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para cierto n_ε. Asímismo,

$$|f_{n_\varepsilon} - S_N^{(n_\varepsilon)}|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para $N \geq N_\varepsilon$.

Si S_N designa la suma parcial N-ésima de la serie de Furier de f se tiene,

$$|f - S_N|_2 \leq |f - S_N^{(n_\varepsilon)}|_2 \leq |f - f_{n_\varepsilon}|_2 + |f_{n_\varepsilon} - S_N^{(n_\varepsilon)}|_2 \leq \varepsilon,$$

para $N \geq N_\varepsilon$, lo que prueba la parte principal del teorema. $\square$

VI.5. Series de Fourier en senos, series de Fourier en cosenos.

Si $f \in L^2(0,\pi)$ las consideraciones del §1 plantean la posibilidad de expresar f como serie de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } nx, \tag{S}$$

o bien como serie de cosenos:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{C}$$

Pues bien, para el obtener el desarrollo en senos basta con fabricar la extensión impar $\bar{f}$ de f al intervalo $(-\pi,\pi)$ y calcular su desarrollo en serie de Fourier. En el caso del desarrollo en cosenos se procede igual, usando la extensión par $\hat{f}$ de f a $(-\pi,\pi)$.

Los coeficientes de la serie de senos (S) toman la forma:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s) \text{ sen } ns\ ds,$$

siendo los de la serie en cosenos (C) los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\ ds \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\cos ns\ ds.$$

IV.6. Convergencia puntual

Enunciamos a continuación dos resultados básicos de convergencia puntual de series de Fourier. Prescidiremos de la demostración, pudiendo consultarse ésta en cualquier texto de análisis matemático (por ejemplo el de T. M. Apostol) o muchos libros de ecuaciones en derivadas parciales. Véase especialmente el de H. F. Weinberger: Ecuaciones en Derivadas Parciales, Reverté, Barcelona.

Teorema (Convergencia puntual). *Sea $f \in L^1(-\pi,\pi)$, 2π-periódica, mientras $x_0 \in [-\pi,\pi]$ es tal que:*

$$\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{|t|} \tag{D}$$

con $t \neq 0$ está en $L^1(-\pi,\pi)$ (condición de Dini). *Entonces la serie de Fourier de f converge a $f(x_0)$ en $x = x_0$, es decir,*

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \text{ sen } nx_0.$$

Observaciones.

Lo importante de la condición (D) es su carácter local; la validez equivale a la integrabilidad de $\{f(t+x_0)-f(x_0)\}/|t|$ en un pequeño entorno de $t=0$.

Por otra parte, cualquiera de las siguientes condiciones implican (D):

(1) f Hölder continua en $x = x_0$ de exponente $0 < \alpha < 1$:
$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha,$$
para $x \sim x_0$, $C > 0$.

(2) f Lipschitz continua en $x = x_0$
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|,$$
para $x \sim x_0$, $L > 0$.

(3) f es derivable en $x = x_0$.

Las tres condiciones implican también la continuidad de f en $x = x_0$. Se debe advertir no obstante que la mera continuidad de f en x_0 no garantiza la convergencia de la serie de Fourier de f a $f(x_0)$ en $x = x_0$. Este hecho fue descubierto por Du Bois-Reymond en 1876, aunque el ejemplo más divulgado se debe a Fejér (1910) (véase cualquier libro de series de Fourier). Nótese por otro lado que la Lipschtzianidad de f en $x = x_0$ equivale a la finitud de los cuatro números de Dini $D^\pm f(x_0\pm)$ definidos como:
$$D^+ f(x_0+) = \overline{\lim_{x\to x_0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad D^- f(x_0+) = \underline{\lim_{x\to x_0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
etcétera.

Una contribución importante de Riemann a la teoría de series trigonométricas -cuyo estudio motivó su perfeccionamiento del concepto de integral– es el llamado principio de localización que viene a asegurar que la convergencia de la serie de Fourier en $x = x_0$ sólo depende del comportamiento de la función en un pequeño entorno de x_0.

Proposición. *Si $f \in L^1(T)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $f = 0$ $\forall$ c. t. $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ entonces:*
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \text{ sen } nx_0 = 0.$$

Observación.

Cuando se quieren aplicar los resultados sobre series de Fourier a funciones continuas no periódicas f, por ejemplo $f(x) = e^x$, éstas se extienden a $\mathbb{R}$ fuera de $[-\pi, \pi]$ de forma 2π-periódica. Resulta entonces natural –incluso inevitable– que aparezcan discontinuidades en dicha extensión (si $f(-\pi) \neq f(\pi)$). El siguiente resultado, debido a Dirichlet, explica el comportamiento de la serie de Fourier en estos casos.

Teorema. *Sea $f \in L^1(T)$ de suerte que las funciones*
$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0-)}{t}\, \chi_{\{t<0\}} \qquad \frac{f(x_0 + t) - f(x_0+)}{t}\, \chi_{\{t>0\}}, \tag{D'}$$
($t \neq 0$) son integrables cerca de 0 (χ_A designa la función carcterística de A). Entonces,
$$\frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \text{ sen } nx_0.$$

Nótese que si f es por ejemplo C^1 a trozos, en el sentido en que este concepto fue definido en el Capítulo III, entonces (D’) se satisface en todos los puntos de discontinuidad.

IV.7. Convergencia uniforme

Un primer resultado elemental es el siguiente.

Proposición. *Si $f \in C^2$ es 2π periódica, f es la suma uniforme de su serie de Fourier.*

El resultado se sigue de la identidades (en L^2),

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx$$

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \text{ sen } nx$$

$$f" = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \cos nx + n^2 b_n \text{ sen } nx.$$

En particular:

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} |f"|_1,$$

que prueba la convergencia absoluta y uniforme de la serie de Fourier.

Supongamos más sencillamente que $f \in C^1(T)$. Una integración por partes establece que:

$$a'_n = nb_n \qquad b'_n = -na_n,$$

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 < \infty$. Para estimar la convergencia escribimos:

$$|S_M(x) - S_N(x)|^2 \leq 2\{\sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n^2}\}\{\sum_{n=N}^{M} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2\},$$

y se deduce la convergencia uniforme.

Con un poco más de generalidad, si $f \in C(T)$, f' existe excepto quizás en un número finito de puntos $\{a_i\}$ con $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ entonces:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx &= \sum_i \int_{-a_{i-1}}^{a_i} f'(x) \cos nx \, dx = \sum_i \lim_{\varepsilon \to 0+} \{\int_{-a_{i-1}+\varepsilon}^{a_i-\varepsilon} f'(x) \cos nx \, dx\} \\ &= n \sum_i \{f \text{ sen } nx|_{a_{i-1}}^{a_i} - \int_{-a_{i-1}}^{a_i} f(x) \text{ sen } nx \, dx\} \\ &= -n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx.\end{aligned}$$

Luego tenemos $a'_n = -nb_n$ como antes y por el mismo razonamiento $b'_n = na_n$.

Perfeccionando el argumento, si $f \in C(T)$ es absolutamente continua entonces

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g,$$

para alguna $g \in L^1(T)$ y cualquier $a \in [-\pi, \pi]$ (véase W. Rudin, Análisis Real y Complejo). Una aplicación cuidadosa del teorema de Fubini (véase el Rudin) demuestra una vez más que se tienen las relaciones:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = -n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{ sen } nx \, dx = n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

por tanto $a'_n = -nb_n$ y $b'_n = na_n$. Si además $g \in L^2$ (g es la derivada en casi todo punto de f) se tendrá la convergencia de la serie $\sum n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2$.

Podemos finalmente enunciar nuestro resultado de convergencia uniforme.

Teorema. *Sea $f \in C(T)$ satisfaciendo alguna de las condiciones precedentes. Entonces,*

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx,$$

uniformemente. Más aún,

$$\sup_{[-\pi,\pi]} |S_M(x) - S_N(x)| \leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=N}^{M} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2}.$$

Observaciones.

a) Haciendo $M \to +\infty$ en la última ecuación tenemos la estimación uniforme del error,

$$\sup_{[-\pi,\pi]} |f(x) - S_N(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f'^2 - \pi\{\sum_{1}^{N} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2\}}.$$

Hemos usado que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Para probarlo consideramos $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$. Su serie de Fourier es:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

de lo que, al ser,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2\pi^3}{6},$$

se tiene:

$$\frac{2\pi^3}{6} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

de donde el resultado.

b) Puede ser de utilidad observar que si $f \in C^{k-1}(T)$, con $f^{(k-1)}$ C^1 a trozos, la serie de Fourier de f:

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx,$$

se puede derivar $k-1$ veces término a término siendo las series resultantes uniformemente convergentes, mientras:

$$f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos nx)^{(k)} + b_n (\operatorname{sen} nx)^{(k)},$$

en $L^2(T)$. Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} \{a_n^2 + b_n^2\} < +\infty,$$

para $0 \leq l \leq k$.

c) Teniendo un poco de cuidado se puede probar un resultado recíproco al precedente. Si $f \in L^2(T)$ satisface (a_n y b_n son sus coeficientes de Fourier):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \{a_n^2 + b_n^2\} < +\infty,$$

entonces $f \in C^{k-1}(T)$, f^{k-1} es absolutamente continua y su derivada en casi todo punto constituye una función de $L^2(T)$.

VI.8. Convergencia uniforme sobre compactos: fenómeno de Gibb

Cuando una función f presenta una discontinuidad de salto en un punto $x = x_0$ y es relativamente regular cerca de $x = x_0$, las sumas parciales S_N de la serie de Fourier desarrollan cuando $N \to +\infty$ un tipo característico de efecto de capa límitite en $x = x_0$ conocido como fenónmeno de Gibb.

La situación precisa se describe en los dos siguientes resultados.

Teorema. *Si f es C^1 a trozos y 2π-periódica entonces su serie de Fourier converge a f uniformemente sobre compactos del conjunto de continuidad de f.*

Teorema [Fenómeno de Gibb]. *Sea f 2π-periódica y C^1 a trozos. Sea a un punto de discontinuidad donde el valor del salto es $\sigma = f(a+) - f(a-)$. Entonces, para*

$$x_N^{\pm} = a \pm \frac{\pi}{\left(N + \frac{1}{2}\right)},$$

se tiene que la suma parcial N-ésima de la serie de Fourier satisface que:

$$S_N(x_N^{\pm}) \sim \sigma I + \frac{f(a-)+f(a+)}{2}$$

siendo $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\, d\theta$.

IV.9. Ecuación de ondas amortiguada.

Los mismos métodos nos permiten considerar problemas más complicados como el correspondiente a la ecuación de ondas con fricción aerodinámica:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2au_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{P}$$

con $a > 0$. Al usar separación de variables y considerar soluciones de la forma $u = X(x)T(t)$ llegamos a la ecuación:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'' + 2aT'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Las condiciones Dirichlet determinan $\lambda_n = n^2$ junto con $X_n = c_n \operatorname{sen} nx$. Si, por simplicidad, ponemos $g = 0$, las T's vienen determinadas por:

$$\begin{aligned} &T'' + 2aT' + n^2cT = 0 \\ &T'(0) = 0, \end{aligned}$$

y por ello,

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at}[\cosh\sqrt{a^2 - n^2c^2}t + \dfrac{a}{\sqrt{a^2-n^2c^2}} \operatorname{senh}\sqrt{a^2-n^2c^2}t] & n < \dfrac{a}{c} \\ e^{-at}[1 + at] & n = \dfrac{a}{c} \\ e^{-at}[\cos\sqrt{n^2c^2 - a^2}t + \dfrac{a}{\sqrt{n^2c^2-a^2}} \operatorname{sen}\sqrt{n^2c^2-a^2}t] & n > \dfrac{a}{c}, \end{cases}$$

donde T_n se ha normalizado para cumplir $T_n(0) = 1$. Si tomamos $f \in L^2(0,\pi)$ una expresión formal de la solución es:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t) \operatorname{sen} nx, \tag{S}$$

con $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$. A los efectos de estudiar la convergencia de la serie podemos consirerarla escrita en la forma:

$$u = u_1 + u_2 = \sum_{n \le a/c} b_n T_n(t) \operatorname{sen} nx + \sum_{n > a/c} b_n T_n(t) \operatorname{sen} nx.$$

Las estimaciones de la serie recaerán sobre la parte u_2. Si, por ejemplo, $f \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$, f'' es derivable en todo $(0,\pi)$ con derivada $f''' \in L^2(0,\pi)$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^6 b_n^2 < \infty,$$

lo que nos da la convergencia uniforme de las derivadas de orden dos de la serie (S). Por ejemplo, la serie formal que corresponde a la derivada de orden dos con respecto a x da lugar a:

$$|\sum_{N}^{M} -n^2 b_n T_n(t) \text{ sen } nx|^2 \leq \{\sum_{N}^{M} n^6 b_n^2\}\{\sum_{N}^{M} \frac{1}{n^2}\}.$$

Esto prueba la convergencia uniforme en $t \geq 0$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n T_n(t)$ sen nx. Para las otras derivadas de orden 2 basta con observar que $T_n(t) = O(1)$, $T_n'(t) = O(n)$, $T_n''(t) = O(n^2)$ uniformemente en $t \geq 0$ cuando $n \to \infty$.

Sin embargo, para que (S) represente una función C^2 y defina una solución de (P), basta con menos regularidad en f, como en la ecuación de ondas. La idea clave es que:

$$T_n(t) \sim e^{-at} \cos nct,$$

cuando $n \to +\infty$. Usando esa referencia podemos observar la solución como,

$$\begin{aligned} u &= e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nct \text{ sen } nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n [T_n(t) - e^{-at} \cos nct] \text{ sen } nx \\ &= \frac{e^{-at}}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n [T_n(t) - e^{-at} \cos nct] \text{ sen } nx. \end{aligned} \tag{1}$$

Se tiene, por otra parte que $(T_n - e^{-at} \cos nct) = O(1/n)$, $(T_n - e^{-at} \cos nct)' = O(1)$ y $(T_n - e^{-at} \cos nct)'' = O(n)$ uniformemente en $0 \leq t \leq T$, para cada $T > 0$, cuando $n \to +\infty$. En consecuencia, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 b_n^2$ basta para asegurar que (1) se puede derivar término a término hasta el orden dos. Tal convergencia estará asegurada si $f \in C^1[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi)$ y existe f'' en $(0,\pi)$ con $f'' \in L^2(0,\pi)$. Estas condiciones se cumplen sobradamente si $f \in C^2[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$ (que de rebote es la condición necesaria y suficiente para que la primera parte de la solución sea C^2). Es divertido observar como si f' es sólo C^1 a trozos la serie es C^2 pero la parte D'Alambert no. Las discontinuidades de la derivadas segundas se propagan a través de la parte D'Alambert siguiendo las características según se ha observado en el Cap. III.

IV.10. Ecuación del calor

Como en el caso correspondiente para la ecuación de ondas, el problema de contorno y valor inicial,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{P}$$

puede tratarse ensayando soluciones de la forma:

$$u = X(x)T(t),$$

que llevan a la ecuación

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

De la igualdad resulta el problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{C}$$

Como se ha visto, la existencia de soluciones no triviales requiere que $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ junto con $X_n = B_n$ sen nx mientras que $T_n = B_n' e^{-n^2 t}$. La combinación,

$$u = \sum_{n=0}^{N} b_n e^{-n^2 t} \text{ sen } nx,$$

permite resolver (P) con funciones de la forma,

$$f = \sum_{n=1}^{N} b_n \text{ sen } nx.$$

Esta clase –finitodimensional– de datos iniciales es claramente insuficiente por lo que parece sobradamente razonable preguntarse cuánto es de grande la clase de datos representables bajo la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } nx, \tag{1}$$

para después proponer,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \text{ sen } nx,$$

al menos como solución formal. Sobre la representabilidad de f en la forma (1) hemos tratado largamente en el presente capítulo. Sabemos, por ejemplo, que si $f \in L^2(0,\pi)$, (1) converge en $L^2(0,\pi)$ bajo la elección de coeficientes $b_n = (2/\pi)\int_0^\pi f(x)$ sen $nx\ dx$. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema. *Sea $f \in C[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, $\exists f'(x)$ para $x \in (0,\pi)$ con $f' \in L^2(0,\pi)$ entonces:*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \text{ sen } nx \in C^\infty\{t > 0\} \cap C\{t \geq 0\}, \tag{S}$$

define una solución clásica del problema (P).

Observaciones. a) En el capítulo siguiente resolveremos (P) bajo menos regularidad para f. A saber $f \in C[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

b) Para que (S) sea C^∞ en $t > 0$ basta con que los coeficientes b_n estén acotados.

c) En la prueba de la continuidad de (S) hasta $t = 0$ el resultado conocido como "principio débil del máximo" jugará un papel importante.

d) Con técnicas de reflexión (ver la ecuación de las ondas) probaremos que la versión Neumann del problema (P) donde las condiciones Dirichlet se substituyen por:

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \tag{N}$$

admite una única solución clásica, $u \in C^2\{t > 0\} \cap C^1\{t \geq 0\}$ cuando $f \in C^1[0,\pi]$, $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Mediante separación de variables y un argumento simétrico si $f \in C[0,\pi]$, $f' \in L^2(0,\pi)$, (N) admite la solución clásica, $u \in C^2\{t > 0\} \cap C\{t \geq 0\}$ de la forma:

$$u = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx \in C^\infty\{t > 0\} \cap C\{t \geq 0\}, \tag{2}$$

$a_n = (2/\pi) \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$, $a_0 = (1/\pi) \int_0^\pi f(x)\, dx$. Las condiciones $f \in C^1[0,\pi]$, $f'(0) = f'(\pi) = 0$ junto con $f'' \in L^2(0,\pi)$ bastan para justificar que (2) define una solución clásica, C^1 hasta $t = 0$.

IV. Anexo. Teorema de Lusin

La aproximación de funciones integrables por funciones continuas es consecuencia del siguiente resultado general (cf. [RU]).

Teorema (Lusin). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible, $|\Omega| < \infty$. Si f es medible en Ω ($f \in M(\Omega)$), para cada $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^n)$ cumpliendo $\sup|g| \leq \sup|f|$ tal que:*

$$|\{x \in \Omega : f \neq g_\varepsilon\}| < \varepsilon.$$

Se tiene como consecuencia.

Corolario 1. *Si $f \in M(\Omega)$, $|\Omega| < +\infty$, $|f| \leq 1$, existe una sucesión $g_n \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $|g_n|_\infty \leq 1$ tal que:*

$$\lim g_n(x) = f(x) \quad \forall \text{ c. t. } x \in \Omega.$$

Demostración. Excogemos g_n tal que $|A_n := \{f \neq g_n\}| \leq 2^{-n}$. Entonces, y $\forall$ c. t. $x \in \Omega$ cada $x \in \Omega$ está a lo más en un número finito de A_n's (Ejercicio). □

Ejercicio. Sea $A_n \subset \mathbb{R}^N$ una sucesión de conjuntos medibles tal que:

$$\sum_n |A_n| < \infty.$$

Usando la integrabilidad de $\sum_n \chi_{A_n}(x)$ pruébese que $\forall$ c. t. $x \in \mathbb{R}^N$, cada $x \in \mathbb{R}^N$ está a lo más en un número finito de A_n's.

Corolario 2. *Sea $f \in L^p(\Omega)$, $|\Omega| < +\infty$, $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces existe una sucesión $g_n \in C_0(\mathbb{R}^n)$ verificando:*

$$\lim g_n(x) = f(x) \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

IV. Ejercicios

1. Hállense, por separación de variables, las soluciones de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ bajo las condiciones que se indican:

(1) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \operatorname{sen}^3 x$, $x \in (0,\pi)$.
(2) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \operatorname{sen} x$, $x \in (0,\pi)$.
(3) $u(a,t) = u(b,t) = 0$, $u(x,0) = (x-a)(b-x)$, $x \in (a,b)$.

2. Se considera el problema de Dirichlet para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,0) = 0 & t \ge 0, \end{cases}$$

para f de clase C^2 y g de clase C^1 en $[0,l]$, satisfaciendo las correspondientes condiciones de compatibilidad. Pruébese que la solución puede representarse en la forma,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{l} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

La misma cuestión relativa al problema de Neumann y la expresión

$$u = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

¿Cuándo es $b_0 = 0$ y qué implica ello sobre la solución del problema?

3. Se considera el problema de Dirichlet y valor inicial para la ecuación de ondas con amortiguamiento:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2a u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,0) = 0 & t \ge 0, \end{cases}$$

donde a, c son constantes positivas. Supóngase que $f \in C^3$ en $[0,\pi]$ y que satisface las correspondientes condiciones de compatibilidad. Constrúyase una solución en forma de serie por el método de separación de variables.

4. Analícese, bajo condiciones adecuadas, la solución del problema de contorno y valor inicial (ecuación de los telegrafístas):

$$\begin{cases} u_{tt} + 2a u_t + b u = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,0) = 0 & t \ge 0. \end{cases}$$

5. Estúdiese por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0,t) = u(1,0) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

6. Demúestrese que la ecuación:

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

admite soluciones en la forma $X(x)Y(y)$. Como indicación, hállese una expresión para $Y"/Y$ que debe derivarse con respecto a x.