

# Cálculo Numérico I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

## Capítulo 4. Aproximación en norma uniforme

1. Se considera el espacio normado  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  y  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , demostrar que  $E_n(f) \leq \|f\|_\infty$ .
2. En el espacio normado  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ , se considera una función  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Demostrar que  $E_0(f) \geq E_1(f) \geq E_2(f) \geq \dots \geq E_n(f) \geq E_{n+1}(f) \geq \dots$  y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$ . Es más, demostrar que si  $f$  es infinitamente derivable y sus sucesivas derivadas no se anulan en ningún punto de  $[a, b]$ , entonces es estrictamente decreciente, es decir,  $E_0(f) > E_1(f) > E_2(f) > \dots > E_n(f) > E_{n+1}(f) > \dots$ .
3. Demostrar que  $P(x) = x^2 + 1/8$  es la aproximación cúbica minimax a  $y(x) = |x|$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .
4. Calcular el mejor aproximante en norma uniforme de una función  $f$  continua en  $[a, b]$  mediante constantes. Obtener el correspondiente error.
5. Sea  $f^{(n+1)}(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$  y denotamos por  $p^* \in \mathbb{P}_n$  a la mejor aproximación a  $f$  en  $\mathbb{P}_n$  con la norma uniforme, entonces no existe más de  $n + 2$  puntos de alternancia de  $f - p^*$ . (Sugerencia: La fórmula del error en la interpolación)
6. Demostrar el Teorema de Marcinkiewicz. " Para toda  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  existe una tabla de nodos  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  tal que  $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $p_n$  son los polinomios interpoladores en dichos nodos ". (Sugerencia: Teorema de Tchebyshev de equioscilación )
7. Dada  $f(t) = \ln(t)$ ,  $t \in [1, e]$ .
  - (a) Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados en  $\mathbb{P}_1$  con la norma  $\|\cdot\|_2$ .
  - (b) Hallar la mejor aproximación en norma uniforme en  $\mathbb{P}_1$ .
  - (c) Obtener el polinomio Taylor de primer grado en el punto  $t = 1$ .
  - (d) Hallar los errores en cada uno de los casos y compararlos.
8. Dado el conjunto de polinomios de grado a lo sumo 2, y considerando la norma del máximo, calcular:
  - (a) La norma de  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  en  $[3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8}]$ .
  - (b) Cuál es la mejor aproximación uniforme de grado  $\leq 1$  en el intervalo  $[3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8}]$  de  $f$ ?

9. Obtener la mejor aproximación minimax de la forma  $x^2 + a_1x + a_0$  a la función  $f(x) = \sin(x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .
10. (a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 1 para  $f(x) = \ln(x)$ ,  $1 \leq x \leq 2$  desarrollado en  $x = 3/2$ . Calcular el error en norma uniforme.  
(b) Obtener la aproximación lineal minimax para  $f(x) = \ln(x)$ ,  $1 \leq x \leq 2$ . Calcular su error. Compararlo con el obtenido para el polinomio de Taylor.
11. Encontrar el polinomio de mejor aproximación minimax de grado  $\leq 3$  a la función  $f(x) = x^4$  en el intervalo  $[0,10]$ . Encontrar el error cometido.
12. Hallar la mejor aproximación uniforme de  $x^{n+1}$  mediante polinomios de grado no mayor que  $n$  en un intervalo  $[a, b]$ . Encontrar el error cometido.
13. Se considera la función  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x$  en  $[-1, 1]$ . Usar el algoritmo de Remez para dar una aproximación al polinomio de mejor aproximación en norma uniforme de grado  $\leq 1$  a  $f$ .
14. Hallar mediante el algoritmo de Remez una aproximación del polinomio de mejor aproximación en norma uniforme de grado  $\leq 1$  a  $f(x) = e^x$  en  $[-1,1]$ .