

Cálculo Numérico I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 3. Aproximación en mínimos cuadrados

1. Sea $V = \mathcal{C}([0, 1])$. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de $f(t) = t^2$ en el conjunto de las funciones de la forma $\alpha t + \beta + \sqrt{t}$, considerando en V la norma $\|\cdot\|_2$.
2. Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ una base de un subespacio vectorial finito dimensional de un espacio pre-Hilbert \mathcal{H} . Demostrar que la matriz de Gram es simétrica y definida positiva
3. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} \in \mathcal{C}([-1, 1])$ en \mathbb{P}_2 . Si en $\mathcal{C}([-1, 1])$ consideramos el producto interior:

(a) Si $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$.

(b) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

En ambos caso determinar la desviación mínima.

4. A pesar de que la función $f(t) = \ln(\frac{1}{t})$ se hace infinito cuando $t \rightarrow 0$, puede aproximarse en $[0, 1]$, por polinomios tanto como uno desee en el sentido de mínimos cuadrados. Demostrar que

$$M_n(\ln(\frac{1}{t})) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_2 = \frac{1}{n+1}$$

Resultando necesario para dicho objetivo las siguientes igualdades;

$$\int_0^1 L_j^2(t) dt = \frac{1}{2j+1}, \quad \int_0^1 L_j(t) \ln(\frac{1}{t}) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ \frac{(-1)^j}{j(j+1)} & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

5. En el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ se considera la norma $\|\cdot\|_2$. Si denotamos por \mathcal{T} el conjunto de polinomios trigonométricos de grado a lo sumo N .
 - (a) Determinar la mejor aproximación en \mathcal{T} de la función $f(x) = x$ y la desviación mínima.
 - (b) Usando el resultado del apartado anterior demostrar que : $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$.
 - (c) Repetir el primer apartado para la función $f(x) = |x|$.
 - (d) Utilizando los resultados del apartado anterior demostrar que : $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

6. La forma bilineal

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)(t+2)e^{-t} dt$$

define un producto escalar en el espacio V de las funciones $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ tales que $\langle f, f \rangle < +\infty$.

- (a) Hallar los cuatro primeros polinomios ortogonales mónicos respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (b) Dada la función $f(t) = t^2 e^{-t}$, hallar la mejor aproximación mínimo cuadrática a f en \mathbb{P}_3 .
- (c) ¿Se puede realizar el apartado (b) para la función $f(t) = te^{\frac{t}{2}}$?

7. Demostrar que si $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-a}^a f(x)g(x)\omega(x) dx$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, y si ω es una función peso par, entonces $\{P_n(-x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la misma función peso, y $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

8. Sea P_n el polinomio de grado n , ortogonal respecto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx$$

siendo ω una función peso. Sean x_1, x_2, \dots, x_n los ceros de P_n . Demostrar que los polinomios fundamentales de Lagrange asociados a dichos ceros, es una base ortogonal en \mathbb{P}_{n-1} .

9. Dada la relación de recurrencia a tres términos $\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k) \cdot \pi_k(t) - \beta_k \cdot \pi_{k-1}(t)$, $k = 0, 1, \dots$ que satisfacen los polinomios ortogonales mónicos $\{\pi_k(\cdot; \omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$ asociados a la función peso ω en $[a, b]$, donde $\beta_0 = \int_a^b \omega(t) dt$. Demostrar que

$$\|\pi_k\|_{2, \omega}^2 = \beta_k \cdot \beta_{k-1} \cdots \beta_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

10. Si denotamos por \mathbb{P}_n^0 al conjunto de todos los polinomios mónicos de grado n . Y $\pi_n(\cdot; \omega)$ es el n -ésimo polinomio ortogonal mónico asociado a la función peso ω en $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b \pi_n^2(t) \omega(t) dt \leq \int_a^b p^2(t) \omega(t) dt, \quad p \in \mathbb{P}_n^0.$$

Lo que quiere decir que el n -ésimo polinomio ortogonal mónico es el de norma mínima.

11. ¿Cuál es la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(t) = 0$ en $[a, b]$ en el conjunto de los polinomios de grado n mónicos con la norma $\|\cdot\|_{2, \omega}$?, ¿y en \mathbb{P}_n ?

12. Los polinomios de Tchebyshev de segunda especie se definen para $t \in [-1, 1]$ como :

$$U_n(t) = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \quad t = \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi]$$

- (a) Demostrar que se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t .$$

En particular, U_n es un polinomio de grado n .

- (b) Demostrar que para $n \geq 0$ el polinomio U_n tiene la misma paridad que el subíndice n . Hallar las raíces de U_n . Probar la siguiente relación con los polinomios de Tchebyshev T_n .

$$T'_n(t) = nU_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 .$$

- (c) Demostrar que

$$\int_{-1}^1 U_n(t) \cdot U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} .$$

¿ Se puede decir que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forman una sucesión de polinomios ortogonales mónicos ?. Obtener una base ortonormal de \mathbb{P}_n con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt .$$

13. Sean P_n los polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n \geq 1 .$$

- (a) Probar que para $k = 0, 1, \dots, n-1$ es $\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0$.

- (b) Probar que $\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$.

- (c) Probar que $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$.

- (d) Probar que $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.

[De lo anterior se deduce que los polinomios de Legendre son ortogonales respecto de la función peso $w(x) = 1$ en $[-1, 1]$]

14. Hallar la expresión de los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx .$$

15. Probar que los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$, $n \geq 0$ son ortogonales respecto de la función peso $1/\sqrt{1-x^2}$ en $(-1, 1)$.

16. Hallar el polinomio de segundo grado mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $y = x^{1/3}$ en $[-1, 1]$ con función peso igual a 1. Calcular el error.

17. Calcular el polinomio de grado ≤ 2 que mejor aproxima a $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$ con norma $\| \cdot \|_2$. Usar primero polinomios ortogonales. Resolver también el problema mediante el cálculo directo.
18. Obtener la mejor aproximación en norma $\| \cdot \|_{2,w}$ de la función $f(x) = xe^x$ mediante polinomios de grado ≤ 2 en $[0,2]$ usando el peso $w(x) = x$. Obtener el error.
19. Los polinomios de Laguerre son los polinomios ortogonales respecto de la función peso $w(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Sabiendo que $L_0(x) = 1$, calcular L_1 , L_2 y L_3 por el procedimiento de ortogonalización de Gram-Smith. Usar estos polinomios para calcular el polinomio de mínimos cuadrados de grado ≤ 3 que aproxima a las funciones $f_1(x) = e^{-x/2}$ y $f_2(x) = \sin(x)/x$.
20. Encontrar la mejor aproximación $\| \cdot \|_{2,w}$ de la función $f(x) = e^{|x|}$ en $[-1,1]$ por polinomios de grado ≤ 3 respecto del peso $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Calcular el error.
21. Hallar el polinomio de segundo grado mejor aproximación por mínimos cuadrados continua ponderada de la función $y = |x|$ en $[-1, 1]$ usando como función peso $(1-x^2)^{-1/2}$. Calcular el error. Resolver la misma cuestión con polinomios de grado no mayor que 1.
22. Probar que las funciones trigonométricas $1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$ son ortogonales respecto de la función peso $w(t) = 1$ en $[0, 2\pi]$.
23. Sea E el espacio de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Hallar la expresión de la mejor aproximación de f en el subespacio engendrado por $\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(mx), \sin(mx)\}$.

24. Hallar el polinomio de grado no mayor que 1 mejor aproximación por mínimos cuadrados en los puntos $-1, 0, 1/8$, de la función $y = x^{1/3}$. Calcular el error.
25. Considérense los datos de la siguiente tabla:

x	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
$f(x)$	2.2	3.5	4.0	6.0	6.5	7.3	8.2	8.7

Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima estos datos. Calcular el error cuadrático y comparar con el ajuste lineal.

26. Construir los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales usando el producto escalar

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)g(1).$$

27. Comprobar que las funciones 1 , $\cos(x)$, $\sin(x)$ son ortogonales respecto del producto escalar

$$(f, g) = \sum_{k=1}^4 f(x_k)g(x_k)$$

con $x_k = k\pi/2$. Como aplicación, hallar en el conjunto de los polinomios trigonométricos $a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$ el que más se aproxima a $y = x$ en el sentido de los mínimos cuadrados en los puntos $x_k = k\pi/2$, $k = 1, 2, 3, 4$.