Cálculo Numérico I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aproximación en espacios normados

1. Demostrar que $\|B_n(f;\cdot)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, siendo $B_n(f,\cdot)$ el polinomio de Bernstein de grado n asociado a $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

2. Demostrar que el polinomio de Bernstein de grado n asociado a f admite la expresión

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$$

donde el operador diferencia Δ actúa sobre los nodos equiespaciados $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

3. Para ilustrar que los polinomios de Bernstein $B_n(f;x)$ son aproximantes de baja calidad, calcular $B_4(f;x)$ para $f(x) = \sin(\pi x)$, $x \in [0,1]$. Compararlo con el polinomio de Taylor de grado 4 desarrollado en $x = 1/2$.

4. ¿ Es cierto que cualquier función continua en un intervalo finito $[a,b]$ se puede aproximar por polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$?, ¿ y en $\mathbb{Z}$?.(*Sugerencia: Usar los polinomios de Bernstein*)

5. *Interpolación y aproximación simultánea. Teorema de Walsh.* " Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $\{x_i\}_{i=1}^m$ nodos en $[a,b]$ distintos dos a dos. Demostrar que $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\; p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad , \quad i = 1, 2, 3, \cdots, m$$
$$\|f - p\|_\infty \quad < \epsilon'' \qquad .$$

6. Probar que el conjunto de polinomios con coeficientes no negativos es convexo.

7. Sea $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones f definidas en $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$, distintos dos a dos. Probar que $\| f \| = \max_{1\leq k\leq N} | f(t_k) |$ define una norma en $\mathcal{F}$. (Se conoce con el nombre de norma infinito o norma uniforme discreta.)

8. En $I\!R^n$ se define la función $\| \cdot \|$ mediante

$$\| (a_1, \ldots, a_n) \| = \max_{0\leq x\leq 1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k \right| .$$

¿Es una norma?

9. Sea V un espacio vectorial, una seminorma $|\cdot|$ es una función definida en V que toma valores en $I\!R^+$ con las mismas propiedades que una norma excepto que si $|u| = 0$ no necesariamente implica que $u = 0$. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}^1([0,1])$, determinar cuáles de las siguientes expresiones definen una norma, y cuáles son sólo una seminorma.

$$(a)\ \max_{t\in[0,1]} |u(t)| \qquad (b)\ \max_{t\in[0,1]} \left[|u(t) + |u^{'}(t)|\right]$$

$$(c)\ \max_{t\in[0,1]} |u^{'}(t)| \qquad (d)\ |u(0)| + \max_{t\in[0,1]} |u^{'}(t)|$$

$$(e)\ \max_{t\in[0,1]} |u^{'}(t)| + \int_{0.1}^{0.2} |u(t)|\, dt$$

10. Definimos $\mathcal{C}^\alpha([a,b]), 0 < \alpha < 1$, como el espacio de todas las funciones $f \in \mathcal{C}([a,b])$ para las cuales

$$M_\alpha(f) = Sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \ :\ x, y \in [a,b], x \neq y \right\} < \infty.$$

Definimos en $\mathcal{C}^\alpha([a,b])$ la función $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + M_\alpha(f)$. Demostrar que $(\mathcal{C}^\alpha([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ es un espacio Banach.

11. Sea V un espacio normado y $\{u_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de Cauchy en V. Supongamos que hay una subsucesión $\{u_{n'}\}_{n'\geq 0} \subset \{u_n\}_{n\geq 0}$ convergente a $u \in V$. Demostrar que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 0}$ es convergente a u.

12. Demostrar que si $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}([a,b])$ es convergente con la norma uniforme, entonces es convergente en la norma $\|\cdot\|_{2,\omega}$.

13. Estudiar la convergencia en la norma uniforme en $[-1,1]$ de la sucesión

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & para \quad t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt & para \quad t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & para \quad t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} .$$

Demostrar que $(\mathcal{C}([-1,\ 1]), \|\cdot\|_2)$ no es completo.

14. En el espacio vectorial $\mathcal{C}^1([0,1])$ definimos la función:

$$< u, v >_* = u(0)v(0) + \int_0^1 u^{'}(t)v^{'}(t)\, dt.$$

Demostrar que $(\mathcal{C}^1([0,1]), < \cdot, \cdot >_*)$ posee estructura de espacio pre-Hilbert. Además, prueba que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_\infty \leq c\|u\|_* \ ,\ u \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

donde $\|u\|_* = \sqrt{< u, u >_*}$. ¿ Qué conclusiones podemos deducir en lo relativo a sucesiones convergentes?.

15. Demostrar que en todo espacio pre-Hilbert $\mathcal{E}$ se cumple la ley del paralelogramo

$$\| f+g \|^2 + \| f-g \|^2 = 2 \| f \|^2 + 2 \| g \|^2, \ f, \ g \in \mathcal{E}.$$

Deducir que el espacio normado $\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio pre-Hilbert.

16. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$, probar que la norma está inducida por un producto escalar si y sólo si se cumple *la ley del paralelogramo* :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \, .$$

Sugerencia: Tome $< a, \, b >= \dfrac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4}$.

17. Interpretar los siguientes problemas como un problema de mejor aproximación y analizar su posible solución.

    (a) *Determinar el punto de una recta más cercano a un punto exterior.*

    (b) *Encontrar el número racional más cercano a* $\sqrt{2}$.

    (c) *Tenemos en el plano un círculo y un punto exterior a él. ¿ Cuál es el punto del círculo más cercano a dicho punto?. ¿ Y si en vez de tener el circulo completo, sólo tenemos su interior ?.*

18. Se considera el espacio vectorial $I\!R^2$, en el cual definimos la siguiente función $\forall \, \alpha, \beta \in I\!R \backslash \{0\}$:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| \, : \, I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^+ \\ (x,y) & \longrightarrow & \|(x,y)\| = \left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

    (a) Demostrar que $(I\!R^2, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

    (b) Definimos el conjunto

    $$U = \{(x,y) \in I\!R^2 \, / \, x = y\} \ .$$

    Discutir la existencia y unicidad (y en su caso hallar) de la mejor aproximación a cualquier punto de $I\!R^2$ en U.

    (c) ¿ Y si $U = \{(x,y) \in I\!R^2 \, / \, y = x+1\}$?.

19. Sean V un espacio normado y $K \subset V$ denso en V. ¿ Qué se puede decir de $E_K(v)$ y de $A_k(v)$ para $v \in V$?.

20. Sean V un espacio normado y S un subespacio vectorial de V. Demostrar que si u es un elemento de mejor aproximación de f en S y $g \in S$, entonces $u+g$ es un elemento de mejor aproximación de $f+g$ en S.

21. Sean V un espacio normado y $S \subset V$ subespacio vectorial de V. Sea $v \in V$, entonces $u \in A_S(v) \quad \Rightarrow \quad \|u\| \leq 2\|v\|$.

22. Demostrar que si $\mathcal{C} = g + \mathcal{S}$ es el conjunto

$$\mathcal{C} = \{g + \nu,\ \nu \in \mathcal{S}\},$$

siendo $\mathcal{S}$ subespacio de dimensión finita de un espacio normado V y $g \in V$, entonces todo elemento f de V admite una única mejor aproximación de f en $\mathcal{C}$.

Como aplicación, sea V el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_2$. Sea S el conjunto de las funciones $\nu(x) = \lambda x,\ \lambda \in I\!R$. Encontrar el mejor aproximante de $f \equiv 1$ en $\mathcal{C} = \{x^2 + \nu,\ \nu \in S\}$.

23. ¿Es posible encontrar la mejor aproximación polinomial uniforme de la función $y = \ln(x),\ 0 \leq x \leq 1$ en dicho intervalo mediante polinomios de la forma $P(x) = ax + b$?

24. En el espacio $V = \mathcal{C}([0,1])$ con la norma uniforme consideramos $u(x) = cos(\frac{\pi x}{2})$, y sea el subespacio lineal

$$K = \{\alpha \cdot x\ /\ \alpha \in I\!R\}\ ,$$

de V. Describir el conjunto $A_K(u)$. ¿ Es este espacio estrictamente convexo ?

25. Sea V el espacio vectorial normado de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Sea S el subespacio de polinomios de grado 0. Buscar la mejor aproximación de $f(x) = e^x$ en S, es decir, resolver el problema: $\min_a \int_0^1 \mid e^x - a \mid dx$.

26. Resolver el problema: $\min\limits_{a} \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} \left| x - ax^2 \right|$. ¿Es la solución única?

27. Resolver el problema de encontrar $\min\limits_{c} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left| x - cx^2 \right| dx$. Comprobar que la solución no es única.

28. Sea $f \in \mathcal{C}^{2)}([a,b])$ con $f''(x) > 0\ \ \forall\, x \in [a,b]$, si $q^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ es la mejor aproximación de f en $\mathbb{P}_1$ en $[a,b]$ con la norma uniforme, entonces:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad a_0 = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \left(\frac{a + c}{2}\right)\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a)}\right]$$

donde c es la única solución de

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

¿ Cuánto vale $E_1(f)$?.