Cálculo Numérico I

Curso 2002-2003

Colección de Problemas

Capítulo 1. Interpolación Polinómica

1. Sea

$$V_n(x) = det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & \cdots & x^n \end{pmatrix}$$

   (a) Demostrar que $V_n \in \mathbb{P}_n$, y que tiene por ceros a $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

   (b) Obtener la fórmula $V_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j) \cdot V_{n-1}(x_{n-1})$.

   (c) Demostrar que $V_n(x_n) = \prod_{0\le j<i\le n}(x_i - x_j)$.

2. Sean $a > 0$, $\{-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [-a, a]$ y $L_{2n}(f; x)$ el polinomio de interpolación de una función $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ en los puntos anteriores. Demostrar los siguientes resultados:

   (a) Si f es una función par (impar) entonces $L_{2n}(f; x)$ es par (impar).

   (b) Si f es una función par, entonces existe $Q_n \in P_n$ tal que $L_{2n}(f; x) = Q_n(x^2)$. ¿ Quién es Q_n? ¿ Qué utilidad tiene esto?

3. Determinar $L_n(f; x)$ en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ para las funciones:

   (a) $f(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

   (b) $f(x) = x^{n+1}$.

4. Sean $\ell_i(x),\ 0 \le i \le n$ los polinomios fundamentales de Lagrange asociados a $\{x_i\}_{i=0}^n\ :\ x_i \ne x_j$.

   (a) Probar que $\{\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_n\}$ en una base en $\mathbb{P}_n$.

   (b) Probar que $\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1$. De forma más general, $\sum_{i=0}^{n} x_i^k \ell_i(x) = x^k,\ 0 \le k \le n\ ,\ \forall x \in I\!R$.

   (c) Demostrar $\sum_{k=0}^{n}(x - x_k) \cdot \ell_k(x) = 0 \quad \forall\, x \in I\!R$.

5. Considerar la fórmula de Lagrange del polinomio interpolador $L_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \ell_i(x)$ con $a \leq x_i \leq b$, $0 \leq i \leq n$, distintos dos a dos. Demostrar que $\|L_n(f,\cdot)\|_{[a,b]} \leq \lambda \cdot \|f\|_{[a,b]}$ siendo $\lambda = \| \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \|_{[a,b]}$, donde $\|g\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$. Demostrar que λ es óptimo para toda $f \in C[a,b]$.

6. Demostrar que si p es el polinomio de interpolación para la nube de n puntos de $I\!R^2$ $\{(x_i, f_i) \,/\, i = 0,\, 1,\, \ldots, n{-}1\}$ y si q es el polinomio de interpolación para la nube de n puntos de $I\!R^2$ $\{(x_i, f_i) \,/\, i = 1,\, 2, \ldots,\, n\}$, entonces

$$r(x) = p(x) + \frac{(x_0 - x) \cdot (q(x) - p(x))}{x_0 - x_n} \quad ,$$

es el polinomio de interpolación para la nube de $n+1$ puntos de $I\!R^2$ $\{(x_i, f_i) \,/\, i = 0,\, 1,\, \ldots, n\}$
.

7. Considerar el problema de encontrar un polinomio cuadrático p para que el que $p(x_0) = y_0$, $p^{'}(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$ con $x_0 \neq x_2$ y $\{y_0,\, y_1,\, y_2\}$ datos dados. Asumiendo que x_0, x_1, x_2 son reales. ¿ Qué condición es suficiente imponer a los nodos para garantizar que p exista y sea único ?.

8. ¿ Qué condición es suficiente imponer a los nodos x_0, x_1 si se quiere que el problema de interpolación $p(x_i) = c_{i,0}, p^{''}(x_i) = c_{i,2}$, $i = 0, 1$, se pueda resolver con un polinomio cúbico (para $c_{i,j}$ arbitrarios) ?.

9. Sea U el espacio vectorial de funciones generado por $\{1,\, e^x,\, e^{-x}\}$.

   (a) Estudiar la existencia y unicidad de la solución del problema de hallar $u \in U$ que interpole en el sentido de Taylor a una función $f \in \mathcal{C}^2$ en el punto x_0. Estos es, $u^{i)}(x_0) = f^{i)}(x_0), i = 0,\, 1,\, 2$.

   (b) Hallar la base de Lagrange del problema de interpolación planteado en el apartado anterior.

   (c) Hallar la función $u(x) \in U$ que interpola, en el sentido anterior, a $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x_0 = 0$ y dar una estimación del error de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$.

10. Sea el espacio de funciones: $E \equiv \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ tal que $\begin{cases} u \in \mathbb{P}_2 & x \in [-1,0] \\ u \in \mathbb{P}_1 & x \in [0,1] \end{cases}$.

    Demostrar que el problema de hallar u perteneciente a E que cumpla:

$$u(-1) = f(-1) \quad , \quad u(0) = f(0) \quad , \quad u^{'}(1) = f^{'}(1)$$

    tiene solución única. Hallar su base de Lagrange.

11. Estúdiese la existencia y unicidad de la solución del problema de interpolación de una función de dos variables $f(x, y)$ mediante un polinomio de la forma.

$$p(x, y) = a + b \cdot x + c \cdot y \quad ,$$

siendo $p(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2$. En el supuesto de que el problema admita solución, hállese la base de Lagrange correspondiente, expresando la solución en dicha base.

12. Se considera el problema de interpolación consistente en hallar un polinomio $p \in \mathbb{P}_n$, verificando:

$$\int_0^{x_i} p(x)\, dx = \alpha_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

Determinar que condición debe verificar $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ para que el problema tenga solución única.

13. Sea el problema de obtener el polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ tal que $p[0] = z_0$, $p[0, 1] = z_1$, $p[0, 1, 2] = z_2$, donde z_0, z_1, z_2 son tres números reales dados.

    (a) Estudiar la unisolvencia del problema.

    (b) Hallar la base de Lagrange para dicho problema y expresar p en dicha base para el caso particular $z_0 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = 1$. ¿ Coincide dicha expresión con la fórmula de Newton de interpolación ? ¿ Por qué?.

14. Se desea interpolar una función f con un polinomio de la forma $p(x) = a + b \cdot x^2$ conociendo los valores de f en los puntos x_1 y x_2. Estudiar la unisolvencia del problema.

15. La siguiente tabla presenta las medidas de cómo varía la temperatura de un sistema. La variable t representa el instante de tiempo y la función $T(t)$ la temperatura. Se pide, en primer lugar, calcular un polinomio de grado ≤ 3 que interpole los 4 primeros datos, y a continuación, uno de grado ≤ 4 que interpole los datos de toda la tabla.

t	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$T(t)$	22	17.8	14.2	38.3	51.7

16. Determinar el número de operaciones aritméticas necesarias para:

    (a) Computar el valor del polinomio interpolador en un punto determinado mediante el algoritmo de Neville.

    (b) Computar todas las diferencias divididas para $n + 1$ puntos.

    (c) Computar (eficientemente) el polinomio interpolación de Newton en un punto una vez que sus coeficientes han sido determinados.

17. Un atleta ha realizado una buena marca en los 100 metros lisos obteniendo un tiempo de 11 segundos y 21 centésimas. Además, se ha medido el tiempo en diversos momentos.

metros recorrido	25	50	75
tiempo (seg.)	3.29	6	8.75

(a) Estimar por interpolación polinomial la marca realizada a los 60 metros, evaluando el resultado por dos vías: usando el algoritmo de Neville y calculando el polinomio interpolador de Newton.

(b) Suponiendo que el atleta siguiera corriendo, estimar por extrapolación la marca de los 200 metros lisos. Comenta el resultado

18. Calcular $sen[0.1,\, 0.2,\, 0.4,\, 0.5,\, 0.7]$.

19. Demostrar que:

(a) Demostrar que $f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n]$ es una función simétrica en sus argumentos.

(b) Si $\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, es el polinomio nodal. Entonces, $f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)}$

(c) Demostrar que $f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = \frac{detV_f}{detV}$, donde V es la matriz de Vandermonde de $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y V_f es la matriz obtenida de V reemplazando su última columna por $(f(x_0),\, f(x_1), \ldots,\, f(x_n))^T$.

(d) Si $f(x) = x^k$, $k = 0,\, 1, \ldots,\, n-1$, entonces $f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = 0$, y si $f(x) = x^n$ se tiene que $f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = 1$, como aplicación verificar que $\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^n}{\omega'(x_j)} = 1$, donde $\omega(x)$ es el polinomio nodal.

20. Calcular el polinomio de interpolación que aproxima las funciones $f_1(x) = x\cos(\pi x)$ en $[-1, 1]$ y $f_2(x) = e^{-x}$ en [0,3] eligiendo como nodos los ceros del polinomio de Chebyshev T_4. Calcular las cotas para el error en ambos casos.

21. Dada la nube de puntos: $(-1, 4)$, $(2, 3)$, $(0, 5)$, $(\frac{1}{2},\, -1)$ y $(-2, 2)$.

(a) Construir el polinomio interpolador en la fórmula de Lagrange.

(b) Construir el polinomio interpolador en la forma de Newton.

22. Si $p \in \mathbb{P}_n$, ¿ Qué clase de función es $p[x_0,\, x]$?

23. Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y $f'(x_0)$ existe con $x_0 \in [a, b]$. Entonces $f[x_0, x]$ es una función continua en $x \in [a, b]$ si le asignamos el valor $f'(x_0)$ cuando $x = x_0$.

24. Determinar de qué grado es el polinomio p del que se conoce los siguientes valores

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(x_i)$	-5	1	1	1	7	25

25. si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, demostrar que

$$f[x_0, x_1] = u[x_0] \cdot v[x_0, x_1] + u[x_0, x_1] \cdot v[x_1]$$

26. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Demuestre que $f[x_0, \ldots, x_n] = (-1)^n \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}$.

27. Sea $a > 1$ y $\mathbb{P}_n^a = \{p \in \mathbb{P}_n \,/\, p(a) = 1\}$. Entonces,

$$\hat{p}_n(t) = \frac{T_n(t)}{T_n(a)} \in \mathbb{P}_n^a$$

donde T_n es el n-ésimo polinomio de Tchebyshev. Demostrar que

$$\|\hat{p}_n\|_{[-1,1]} \leq \|p\|_{[-1,1]} \qquad \forall\, p \in \mathbb{P}_n^a \ .$$

Como aplicación obtener una estimación del error en la extrapolación en función del error cuando escogemos como nodos los ceros de los polinomios de Tchebyshev.

28. Sea $f : I\!R \backslash \{a\} \longrightarrow I\!R$

$$t \longrightarrow \tfrac{1}{a-t}$$

se desea interpolar en los nodos $x_0,\, x_1, \cdots,\, x_n$ con $x_i \neq a\,,\ i = 0,\, 1,\, 2, \cdots,\, n.$

(a) Hallar una expresión para $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Hallar el polinomio interpolador en los nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$ utilizando el apartado anterior. Determinar la expresión del error.

(c) Si $t \in [-1, 1]$ y $a > 2$, hallar la expresión de los nodos que minimizan el error en la interpolación. Hallar una cota del error.

29. Si denotamos por

$$\Sigma^n = \Big\{ (s_0,\, s_1, \cdots,\, s_n) \in I\!R^{n+1} / s_0 + s_1 + \cdots + s_n = 1 \text{ y } s_i \geq 0 \ \ , \ \ i = 0,\, 1, \ldots, n \Big\} \ .$$

Si $f \in \mathcal{C}^n(\Sigma^n)$, entonces

$$f[x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n] = \int \int \cdots \int_{\Sigma^n} f^{n)}(s_0 \cdot x_0 + s_1 \cdot x_1 + \cdots s_n \cdot x_n)\, ds_0\, ds_1 \, \cdots ds_n \ .$$

A dicha expresión de la diferencia dividida de orden n de f asociada a $\{x_i\}_{i=0}^n$, se le denomina **fórmula de Hermite-Genochi**. De la cual se puede deducir que en esta situación la diferencia dividida de orden n es una función continua en sus argumentos.

Sugerencia: Usar inducción matemática sobre n.

30. Construir el polinomio interpolador a $f(x) = cos(\pi \cdot x)$ usando como nodos $\{0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1\}$. Posteriormente, intégrelo sobre $[0, 1]$, compare el resultado con

$$\int_0^1 cos(\pi x)\, dx = 0 \ \ .$$

31. Sea la función $J(x)$ definida como: $J(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} \cdot sen(t)\, dt$. Demostrar que el error cometido al sustituir $J(x)$ por su recta interpoladora en los puntos x_0 y $x_1 > x_0$ no excede de:

$$e^{-x_0} \frac{(x_1 - x_0)^2}{4\sqrt{2}} \quad ,$$

en ningún punto del intervalo.

32. Se dispone de una tabla de la función $\ln(x)$ para los enteros desde 1000 hasta 10000. Se interpola linealmente *a trozos* , analizar si es posible aproximar el valor de la función en cualquier punto intermedio con un error menor o igual que $5 \cdot 10^{-6}$.

33. Interpolación inversa: Para resolver la ecuación $\sin(x) = 0.75$, uno puede intercambiar los papeles del conjunto de nodos y del conjunto de valores. Encontrar una solución aproximada de la ecuación anterior en el intervalo $(\pi/4, \pi/3)$ por interpolación en los puntos $\sin(0) = 0,\ \sin(\pi/6) = 1/2,\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/2) = 1$.

34. Si $y = f(x)$ y si $f'(x) \neq 0$ para $x_0 < x < x_1$, probar que el error en interpolación lineal inversa basada en los datos $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$ admite la expresión

$$-(y - y_0)(y - y_1)\frac{f^{(2)}(\zeta)}{2(f'(\zeta))^3} \quad , \quad x_0 < \zeta < x_1,$$

si $f^{(2)}(x)/(f'(x))^3$ existe y es continua en $x_0 \leq x \leq x_1$. Probar también la cota siguiente para dicho error

$$\frac{(y_1 - y_0)^2 K}{8} \quad ,$$

si $|f^{(2)}(x)/(f'(x))^3| \leq K \quad , \quad x_0 \leq x \leq x_1$.

35. Sea $L_n(f; t)$ el polinomio interpolador de $f(t) = e^t$ en los nodos $x_k = \frac{k}{n}\ ,\ \ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots, n$. Estimar el error de interpolación cometido en el intervalo $[0, 1]$, y halle el menor valor de n para el cual se puede garantizar que el error en $\leq\ 10^{-6}$.

Sugerencia: Demostrar que

$$\max_{t \in [0,1]} \left| (t - \frac{i}{n})(t - \frac{n-i}{n}) \right| \leq \frac{1}{4} \qquad i = 0,\ 1, \cdots, n \ \ .$$

Determinar el polinomio de Maclaurin del mismo grado, estimar el error. Comparar ambos resultados.

36. Considere los nodos equidistantes $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ y $\omega_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-k)$, el polinomio nodal:

(a) Demostrar que $\omega_n(t) = (-1)^{n+1} \cdot \omega_n(n-t)$. ¿ Qué tipo de simetría satisface ?.

(b) Demostrar que $|\omega_n(t+1)| \leq |\omega_n(t)|$ para $0 < t+1 \leq \frac{n}{2} \quad , \quad t \notin \mathbb{Z}$.

(c) Demostrar que los máximos locales de $|\omega_n(t)|$ en $[0,n]$ crecen monótonamente a partir del centro de $[0,n]$.

(d) Demostrar que $|\omega(t)| \leq \frac{n!}{4} \quad \forall\, t \in [0,n]$.

(e) $\Delta\pi_n(t) = n\pi_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \ldots$. Donde Δ es el operador diferencia finita con $h = 1$.

37. Se considera la función $f(t) = \ln(1+t)$, que se desea interpolar en $[0,2]$.

(a) Tome una partición equiespaciada de $[0,2]$, de paso $h = 0.5$. Halle el polinomio interpolador p que pase por la nube de puntos correspondiente. Estimar tanto superiormente como inferiormente $\|f-p\|_{[0,2]}$. Compare con el valor real en $t = 1.23$.

(b) Calcular el polinomio interpolador asociado a los nodos de Tchebyshev $x_{k,5}$, $k = 1, 2, \cdots, 5$ en el intervalo $[0,2]$. Acotar el error.

38. Sea T_n el polinomio de Tchebyshev de grado n.

(a) Demostrar que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficiente director 2^{n-1}.

(b) Calcular $T_n'(0)$.

(c) Probar $T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x)$.

(d) Probar $T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\left[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right]$.

(e) Probar $\int T_n(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right)$, $n > 1$.

(f) Demostrar que

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] \qquad |x| > 1.$$

(g) Probar $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.

(h) Demostrar que la sucesión de los polinomios de Tchebyshev $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de primera especie asociados a $[a,b]$ constituye una sucesión de Sturm.

(i) Demostrar que:

$$\int_{-1}^{1} T_i(t)\cdot T_j(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mu_i \cdot \delta_{i,j}$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. Como aplicación, obtener la relación de recurrencia a tres términos.

39. Sea $Q(x) = x^n + q_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + q_1 \cdot x + q_0$. Deseamos interpolar Q en $[-1, 1]$ por un polinomio $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ tal que el error $|Q(x) - p(x)|$ sea mínimo en $[-1, 1]$. ¿ Cómo debemos elegir los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n-1}$ y cuanto de grande es el error mínimo ?.

40. Determinar min $\max\limits_{a \leq x \leq b} |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n|$ donde el mínimo se toma sobre todos los valores reales $a_1, \ldots, a_n$ con $a_0 \neq 0$.

41. Sea f una función definida en $I\!R$, tal que

$$|f^{k)}(x)| \leq M \qquad k \in I\!N, \quad x \in I\!R\,.$$

Y deseamos aproximarla en $[0, h]$ por medio del polinomio interpolador $L_{2n-1}(f; , x)$ en los nodos

$$-(n-1)h,\ -(n-2)h, \cdots, -2h,\ -h,\ 0,\ h,\ 2h, \cdots,\ (n-1)h,\ nh$$

¿ Cuál debe ser el tamaño de h para que $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - L_{2n-1}(f; \cdot)\|_{[0,h]} = 0$?.

42. (*Pérdida de un nodo*). Sea f una función definida en $I\!R$ verificando

$$|f^{m)}(x)| \leq M^m \qquad m \in I\!N \qquad \text{y} \qquad x \in I\!R$$

para alguna constante M. Para $n = 1, 2, \ldots$, sea $L_{2n-1}(f; x)$ el polinomio interpolador de f en los nodos.

$$-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2, \ldots n \quad .$$

Demostrar que si $M < 2$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} L_{2n-1}(f; 0) = f(0)$$

43. Se considera una función definida en $I\!R^+$ y satisface que

$$|f^{n)}(x)| \leq 1 \qquad n \in I\!N \quad , \quad x \in I\!R^+$$

y sea $L_n(f; x)$ el polinomio de interpolación en los nodos $0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ nh$. ¿ Cuál debe ser el tamaño de h para garantizar que $\lim\limits_{n \to \infty} L_n(f; x) = f(x) \quad \forall x \in I\!R^+$?.

44. Una función f definida en $[0, 1]$, y sus derivadas satisfacen

$$|f^{k)}(x)| \leq k! \qquad k \in I\!N \quad , \quad x \in [0, 1]$$

y denotamos por $L_n(f; x)$ al polinomio interpolador en $1,\ q,\ q^2, \ldots,\ q^n$ donde q es cualquier número verificando $0 < q < 1$. Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f; 0) = f(0)$$

45. Si denotamos por $\{A_j\}_{j=0}^n$ y $\{B_j\}_{j=0}^n$ a los polinomios fundamentales de Hermite de primera y de segunda especie, respectivamente. Demostrar:

   (a) $\sum_{j=0}^{n} A_j(x) = 1$.

   (b) $\sum_{j=0}^{n}(x - x_j)A_j(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j(x)$.

   (c) Si los nodos son los ceros del (n+1)-ésimo polinomio de Tchevishev T_{n+1} , entonces $A_j(x) \geq 0 \quad x \in [-1, 1]$.

   (d) Si los nodos son los ceros del (n+1)-ésimo polinomio de Tchevishev T_{n+1} , entonces $|B_j(x)| \leq A_j(x) \quad x \in [-1, 1]$.

46. Sea la integral de Fresnel:

$$F(t) = \int_0^t \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x^2)\, dx$$

   teniendo en cuenta la siguiente tabla.

t_i	2	2.02	2.06	2.08
$F(t_i)$	0.488253	0.5082	0.546811	0.564828

   (a) Estimar $F(2.04)$ usando el polinomio interpolador en la forma de Newton. Acotar el error.

   (b) Si además, conocemos.

t_i	2	2.02	2.06	2.08
$F'(t_i)$	1	0.992036	0.92768	0.871419

   Hallar el polinomio de interpolación de Hermite que interpola a $\{(t_i,\, F(t_i)), (t_i, F'(t_i))\}$.

47. La función f verifica $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f'(2) = 7$, $f''(2) = 8$. Determinar el polinomio de interpolación de Hermite.

48. Se considera la función $f(x) = |x|$ y el conjunto de nodos $\{-2, 0, 2\}$.

   (a) Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange.

   (b) Calcular el polinomio de interpolación oscilatoria de Hermite.

   (c) Estúdiese ambas interpolaciones en $[1, 2]$. ¿ Cuál de ellas aparentemente es mejor ? .

49. Determinar el polinomio de Hermite para las siguientes condiciones de interpolación.

   (a) $P(x_1) = f(x_1)$, $P'(x_1) = f'(x_1)$, $P(x_2) = f(x_2)$, $P'(x_2) = f'(x_2)$, con $x_1 \neq x_2$.

   (b) $P(x_1) = f(x_1)$, $P'(x_1) = f'(x_1)$, $P''(x_1) = f''(x_1)$, $P(x_2) = f(x_2)$, con $x_1 \neq x_2$.

50. Calcular el polinomio de Hermite que aproxima las siguientes funciones. Acotar el error.

(a) $f(x) = x^2 e^x + xe^{2x} + 1$ con nodos $\{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\}$.

(b) $f(x) = \log(1 + x)$ con nodos $\{1, 1, 2, 2\}$.

51. Calcular tan(22.5) por medio de la interpolación oscilatoria de Hermite en 0 y 45. (Valor de la función y de la derivada primera en cada punto). Calcular una cota del error y comparar con el valor exacto.