ANALISIS MATEMATICO VI. Tema V : Singularidades aisladas de funciones analíticas

Curso 2002-2003

1. Clasificar la singularidad de f en z_0 y determinar Res (f, z_0):
   a) $f(z) = \frac{\cos z}{\text{sen } z}$, $z_0 = \pi$ b) $f(z) = \frac{\cos(\pi z/2)}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ c) $f(z) = \frac{\text{sen}^2 z}{(z-\pi)^6}$, $z_0 = \pi$
   d) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$ e) $f(z) = (z+1)^4 \text{sen}\,(\frac{\pi}{(z+1)})$, $z_0 = -1$ f) $f(z) = \frac{\text{Log}^2 z}{(z-1)^5}$, $z_0 = 1$
2. Determinar la parte singular de f en z_0 y utilizarla para clasificar la sigularidad en z_0 y calcular Res (f, z_0):
   a) $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$ b) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, $z_0 = -i$
3. Resolver las siguientes integrales:
   a) $\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} dz$ b) $\int_{|z-6|=4} \frac{1}{\text{sen } z} dz$
   c) $\int_{|z-1|=3/2} \frac{e^{1/z}}{z^2-1} dz$ d) $\int_{|z|=1} \frac{\text{sen } z - z}{z^6} dz$
4. Probar las siguientes igualdades:
   a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k - \text{sen } \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}$, $k > 1$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $a > b \geq 0$
5. Resolver las siguientes integrales:
   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{ab(b+a)}$, $a, b > 0$
6. Supóngase que f es una función analítica no constante en un dominio D del plano complejo. Si $|f|$ tiene un mínimo local en un punto a de D, entonces $f(a) = 0$ (Principio del mínimo).
7. Probar que todas las raíces de $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ yacen entre las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 2$.
8. Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| > e$. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $cz^n = e^z$ tiene n soluciones diferentes en el disco unidad $\mathbb{D}$ y que son las únicas en el semiplano $\{\text{Re } z < 1\}$.
9. Sea $f(z) = z^5 + 5z^3 - 1$. Probar que sus cinco raíces están contenidas en el disco $D(0, 7/3)$ y son simples. Probar que tres de ellas están contenidas en el disco unidad.
10. Probar el teorema fundamental del álgebra usando el teorema de Rouché.
11. Resolver las siguientes integrales
    a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{k + \text{sen } \theta} d\theta$, $k > 1$ b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\text{sen } \theta} d\theta$ c) $\int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \text{sen}^2 t) dt$
    d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x-1)^2+1} dx$
    g) $\int_0^{\infty} \frac{x \text{sen } x}{(x^2+1)^2} dx$ h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx$ i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } 2x}{x+4} dx$
    j) $\int_{-\infty} +\infty \frac{\cos 2x}{x^2-16} dx$ k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx$