CAPÍTULO IV

ANÁLISIS MATEMÁTICO V

ECUACIONES LINEALES

IV.1. Resultados Fundamentales

A lo largo de todo el capítulo supondremos que $A = A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ es una función matricial continua definida sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$. Debe subrayarse que todos los resultados de esta sección son válidos cuando se consideran matrices complejas $A(t)$, funciones vectoriales $b(t)$ complejas y soluciones $x = x(t)$ complejas (sin embargo la variable independiente t se mantendrá real en el contexto del presente capítulo).

Teorema 1 (Existencia, unicidad y prolongación).
Sean $A = A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $b : J \to \mathbb{R}^n$ continuas en el intervalo J de $\mathbb{R}$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada $t_0 \in J$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución definida en todo el intervalo J.

Definición 1.
La ecuación diferencial $x' = A(t)x + b(t)$ se denomina lineal. Si $b(t) \equiv 0$ la ecuación se dice homogénea.

Sobre la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2 (Principio de Superposición).
El conjunto $\{x = x(t)/x : J \to \mathbb{R}^n, x' = A(t)x, t \in J\}$ de las soluciones de la ecuación lineal

$$x' = A(t)x,$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Definición 2.
Si $S = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi(t)\}$ es una base del espacio de soluciones de $x' = A(t)x$ entonces se dice que S constituye un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. El sistema fundamental se denomina normalizado en t_0 siempre que $\varphi_i(t_0) = e_i = (0, \overset{i)}{\ldots}, 1, \ldots, 0)$.

Corolario 3.
En las condiciones del teorema 2 la ecuación $x' = A(t)x$ admite para cada $t_0 \in J$ un sistema fundamental de soluciones normalizado en t_0.

Corolario 4.

Sea $S = \{\varphi(t), \dots, \varphi(t)\}$ un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. Entonces, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existen n números reales únicos (sólo dependen de t_0 y de x_0) $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que, la solución del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{P}$$

se escribe en la forma

$$x(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(t). \tag{1}$$

Si S está normalizado en t_0 entonces

$$x(t) = x_{01}\varphi_1(t) + \cdots + x_{0n}\varphi_n(t), \tag{2}$$

donde $x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$.

Nota.

La relación (2) demuestra que la solución general $x(t, t_0, x_0)$ del problema (P) es lineal en x_0.

IV.1.1. Representación matricial de soluciones

Definición 3.

Dado un sistema de n vectores de $\mathbb{R}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$, denotaremos por

$$\mathit{col}\ [v_1, \dots, v_n]$$

a la matriz $n \times n$ cuya columna i-ésima es la matriz columna de coordenadas de v_i, $1 \leq i \leq n$.

Observaciones

Supongamos que $S = \{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. Si

$$\Phi(t) = \text{col}\ [v_1(t), \dots, v_n(t)]$$

entonces la expresión (1) se puede escribir

$$x(t) = \Phi(t)a \tag{3}$$

con $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$, es decir la matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Análogamente la (2) se puede escribir como

$$x(t) = \Phi(t)x_0. \tag{4}$$

En expresiones como (4), cuando un vector “siga a la derecha” a una matriz, entederemos que dicho vector se considera a la vez como la matriz columna de sus coordenadas.

Obsérvese además que la matriz $\Phi(t)$ satisface la identidad (ecuación matricial)

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \in J. \tag{5}$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.
Una función matricial diferenciable $\Phi = \Phi(t)$, $\Phi : J \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *se dice una matriz solución de la ecuación*

$$x' = A(t)x,$$

si, para cada $1 \leq i \leq n$, *la columna i-ésima de* $\Phi(t)$, $\varphi_i = \varphi_i(t)$, *es una solución de dicha ecuación.*

Propiedad 5. *Una función matricial diferenciable* $\Phi = \Phi(t)$,$\Phi : J \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es una matriz solución de la ecuación*

$$x' = A(t)x,$$

sí y solamente si $\Phi(t)$ *satisface la ecuación (5) en* J.

Propiedad 6.
Sea $\Phi = \Phi(t)$, $\Phi : J \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *una matriz solución. Entonces,* $\Phi(t)$ *es invertible en cada* $t \in J$ *sí y sólo sí existe* $t_0 \in J$ *tal que* $\Phi(t_0)$ *es invertible.*

Definición 5.
Una matriz solución $\Phi = \Phi(t)$ *es una matriz fundamental de la ecuación*

$$x' = A(t)x,$$

si es invertible, e.d., existe $\Phi(t)^{-1}$, *en cada* $t \in J$. *Una matriz fundamental está normalizada en* t_0 *si* $\Phi(t_0) = I$ *(la matriz identidad* $n \times n$*).*

Observaciones
El Corolario 3 asegura la existencia de matrices fundamentales normalizadas en cualquier instante t_0 de J.

Propiedad 7.
Sea $\Phi = \Phi(t)$ *una matriz fundamental de la ecuación* $x' = A(t)x$. *Entonces, para cada* $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *invertible,* $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$ *es también una matriz fundamental de dicha ecuación.*

Teorema 8.
Sea $A = A(t)$ *una función matricial continua definida en un intervalo* J *de* $\mathbb{R}$, *y sea* $\Phi = \Phi(t)$ *una matriz fundamental de la ecuación* $x' = A(t)x$. *Entonces, la solución general* $x(t, t_0, x_0)$ *del problema*

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{P}$$

se puede escribir en la forma

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0, \quad t \in J.$$

Teorema 9 (Fórmula de Variación de las Constantes).
En las condiciones del Teorema 8, sea $b = b(t)$, $b : J \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces, la solución del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{P}$$

admite la representación:

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)\ ds \qquad t \in J.$$

Teorema 10 (Identidad de Jacobi).
En las condiciones de los teoremas precedentes, la función real

$$z(t) = det\ \Phi(t)$$

satisface, para cualquier matriz solución $\Phi = \Phi(t)$, la ecuación diferencial

$$z' = (traza\ A(t))z.$$

En otras palabras,

$$det\ \Phi(t) = det\ \Phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} traza\ A(s)\ ds\right).$$

IV.1.2. La ecuación de orden n

Los resultados de la sección anterior se aplican a la ecuación lineal de orden n,

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{6}$$

donde las $a_i(t)$ son continuas en un intervalo J de $\mathbb{R}$. Para ello basta escribir (6) como un sistema de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ &\cdots \\ x_n' &= -a_n x_1 - \cdots - a_1(t)x_n. \end{aligned} \tag{$6'$}$$

Sin embargo es muy conveniente interpretar los resultados ya obtenidos en este formato. Recúerdese que $x = x(t)$ es solución de (6) si y sólo si

$$(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

es solución de (6').

Corolario 11.

El conjunto de soluciones de la ecuación (6) constituye un espacio vectorial de dimensión n. Cualquier base $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, se denomina un sistema fundamental de soluciones de (6).

Si $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es cualquier familia de n soluciones de (6) y consideramos el sistema de funciones vectoriales $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ definidas por

$$\varphi = (\psi_i, \ldots, \psi_i^{(n-1)}), \quad \text{para cada} \quad i,$$

entonces $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones para (6) sí y sólo sí

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

lo es de la ecuación (6'). En este caso, la matriz

$$\text{col}\,[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \begin{pmatrix} \psi_1 & \ldots & \psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} & \ldots & \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

será, obviamente, una matriz fundamental de (6').

Si $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (6), entonces la solución del problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} & x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \\ & x(t_0) = x_{01} \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{aligned}$$

para $t_0 \in J$, $x_{01}, \ldots, x_{0n} \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se puede escribir en la forma

$$x(t) = c_1\psi_1(t) + \cdots + c_n\psi_n(t),$$

para ciertos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, únicos cuando t_0 y los x_{0i}, $1 \leq i \leq n$ se han fijado.

Definición 6.

Dada la familia de n funciones C^{n-1} sobre el intervalo J, $\{g_1, \ldots, g_n\}$, se denomina determinante Wronskiano $W(t) = W(g_1, \ldots, g_n)$ de la familia a

$$W(t) = \begin{vmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(n-1)} & \cdots & g_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad t \in J.$$

Corolario 12.

Sea $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ una familia de n soluciones de la ecuación (6). Entonces, dicha familia es linealmente independiente si y sólo si existe $t_0 \in J$ tal que $W(\psi_1, \ldots, \psi_n)(t_0) \neq 0$.

Corolario 13 (Jacobi).

Sea $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ *una familia de* n *soluciones de la ecuación (6). Entonces* $W(t) = W(\psi_1, \ldots, \psi_n)(t)$ *satisface la ecuación lineal,*

$$W'(t) = -a_1(t)W(t).$$

En otras palabras, para $t_0 \in J$ *fijado*

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} (-a_1(\tau))\, d\tau.$$

IV.2. Exponencial de un operador lineal

Propiedad 14.

Sea $(X, |\ |)$ *un espacio de Banach, y sea* $T : X \to X$ *un operador lineal y continuo, es decir*

$$\sup_{x \in X, x \neq 0} (|T(x)|/|x|) < \infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

converge absolutamente en $\mathcal{L}(X) = \{T : X \to X / T \text{lineal y continuo}\}$. *Además*

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \| < \exp(\|T\|).$$

Nota

Para $T \in \mathcal{L}(X)$, $\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} (|T(x)|/|x|) < \infty$. Recuérdese que si T_1 y $T_2 \in \mathcal{L}(X)$ entonces $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\|\ \|T_2\|$.

Definición 7.

Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, *se define la exponencial* e^T *del operador* T *a la suma (en* $\mathcal{L}(X)$*) de la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

Por el mismo principio si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ *se define*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Teorema 14 (Propiedades de la exponencial).
Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ entonces,

a) $e^0 = I$ *(la matriz identidad $n \times n$).*
b) *Si $AB = BA$ entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

c) *Si $AB = BA$ entonces*

$$B^k e^A = e^A B^k \text{para cada } \ k \in \mathbb{N}.$$

d) *La función*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ t &\rightarrow \quad e^{tA} \end{aligned}$$

es C^∞. Además,

$$\frac{d^k}{dt^k}(e^{tA}) = A^k e^{tA} = e^{tA} A^k.$$

Teorema 15.
Dada la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, la función e^{tA} es una matriz fundamental de la ecuación,

$$x' = Ax.$$

En particular, la única solución del problema

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

se escribe

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0.$$

Análogamente, para $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ continua, la única solución del problema

$$\begin{aligned} x' &= Ax + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

se representa en la forma:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\ ds.$$

IV.3. La forma canónica de Jordan, aplicaciones al cálculo de la exponencial de una matriz

Propiedad 16.
Sean $A, P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, P invertible. Entonces,

$$(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}.$$

La propiedad 16 sugiere la estrategia para simplificar el cálculo de e^A. La idea consiste en hallar, para una matriz A dada, una matriz invertible P tal que

$$A = P^{-1}JP,$$

y de forma que J sea lo más sencilla posible en el sentido de que J tenga el mayor número de ceros posible.

Propiedad 17.

a)
$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

b) *Sea L_n la matriz $n \times n$ dada por,*

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$e^{tL_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

c) *Si A es una matriz diagonal por bloques:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

(siendo los bloques matrices cuadradas) entonces,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_p} \end{pmatrix}.$$

Observaciones

Se deben rescatar en este punto los conceptos de autovalor y autovector asociados a un operador lineal $T \in L(\mathbb{C}^n)$, o lo que es lo mismo, para una matriz compleja $n \times n$, A. Asimismo nos remitimos al curso de Algebra Lineal de primer curso para el estudio de las condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea diagonalizable. Es pertinente introducir ahora la siguiente noción.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $T \in L(\mathbb{C}^n)$. Entonces el índice ν de λ es el mínimo de los números naturales k tales que

$$N(T - \lambda I)^k = N(T - \lambda I)^{k+1}.$$

En este caso, el subespacio

$$N(T - \lambda I)^\nu,$$

que contiene al autoespacio $N(T - \lambda I)$, se denomina el autoespacio generalizado asociado a $\lambda \in \mathbb{C}$. Se denomina multiplicidad algebraica del autovalor λ al número

$$\dim\, N(T - \lambda I)^k,$$

que coincide con la multiplicidad de λ como raíz del polinomio caraterístico asociado a T. Finalmente, se denomina multiplicidad geométrica de λ al número

$$\gamma = \dim\, N(T - \lambda I).$$

Denominaremos también bloque nilpotente[1] de índice k a la matriz $k \times k$ (que es nilpotente y de índice k) dada por

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $L_1 = (0)$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

[1]Se dice que una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es nilpotente de índice $k \in \mathbb{N}$ si $A^k = 0$ mientras $A^{k-1} \neq 0$. La misma definición se usa para aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Teorema 18.

Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (o una matriz compleja A $n \times n$), con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicidades geométricas $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. Entonces existe una base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ (una matriz invertible P) sobre la cual la matriz asociada a T (la matriz PAP^{-1}) es diagonal sí y sólo sí

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_p = n.$$

Teorema 19 (Forma Canónica de Jordan).

Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (o una matriz $n \times n$ compleja A), con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, multiplicidades geométricas $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, multiplicidades algebraicas $n_1, \ldots, n_p$ e índices $\nu_1, \ldots, \nu_p$. Entonces existe una base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ (una matriz invertible P) sobre la cual la matriz asociada a T (la matriz PAP^{-1}) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_p \end{pmatrix},$$

donde, para cada $1 \leq i \leq p$, J_i es una matriz cuadrada $n_i \times n_i$ de la forma:

$$J_i = \lambda_i I_i + N_i$$

siendo I_i la matriz identidad de dimensiones $n_i \times n_i$, y siendo N_i la forma canónica de un operador nilpotente de índice ν_i, es decir, una matriz $n_i \times n_i$ de la forma

$$\begin{pmatrix} L_{\nu_i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & L_{\nu_i} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & L_1 \end{pmatrix},$$

en la cual aparecen, en forma diagonal, una serie de r_1 bloques nilpotentes de índice ν_i, a continuación una serie de r_2 bloques nilpotentes de índice $\nu_i - 1$, y así en órdenes decrecientes hasta que se cierra la serie con r_{ν_i} bloques de índice 1 (es decir, con r_{ν_i} "ceros"). Los números r_j satisfacen además las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&r_1 = \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} - \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 1}, \\
&r_1 + r_2 = \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 1} - \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 2}, \\
&\ldots \\
&r_1 + \cdots + r_{\nu_i - 1} = \dim N(T - \lambda_i I)^2 - \dim N(T - \lambda_i I) \\
&r_1 + \cdots + r_{\nu_i - 1} + r_{\nu_i} = \dim N(T - \lambda_i I).
\end{aligned}$$

Observaciones

Nótese que de la última línea se deduce que la multiplicidad geométrica $\gamma_i = \dim N(T - \lambda_i I)$ proporciona el número de bloques L_k que aparecen en la parte nilpotente N_i de la submatriz J_i. La prueba del teorema 19 se apoya en el siguiente resultado.

Teorema 20.
Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (o una matriz $n \times n$ compleja A), con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, multiplicidades geométricas $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, multiplicidades algebraicas $n_1, \ldots, n_p$ e índices $\nu_1, \ldots, \nu_p$. Entonces,

a) *Cada auoespacio generalizado es invariante frente a T, es decir*

$$T(N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}) \subseteq N(T - \lambda_i I)^{\nu_i},$$

para cada $1 \leq i \leq p$.

b)
$$\mathbb{C}^n = N(T - \lambda I)^{\nu_1} \oplus \cdots \oplus N(T - \lambda I)^{\nu_p}.$$

Además es importante subrayar el siguiente lema de prueba inmediata:

Lema 21.
Sea $T \in L(\mathbb{C}^n)$, y sean U y W subespacios de $\mathbb{C}^n$ tales que

a)
$$\mathbb{C}^n = U \oplus V;$$

b) *U y Vson invariantes frente a T, es decir,*

$$T(U) \subseteq U \quad \& \quad T(V) \subseteq V.$$

Sean $\{e_1, \ldots, e_p\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_q\}$ bases de U y V respectivamente ($p + q = n$). Sean A_1 y A_2 las matrices $p \times p$ y $q \times q$ de T, como aplicación de U en U, y de T como aplicación de V en V, respectivamente. Entonces, la matriz de T en la base $\{e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_q\}$ es

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

La demostración del teorema 20 procede entonces como sigue. En función del teorema 20 y del Lema 21 basta con encontrar una base adecuada B_i del autoespacio generalizado $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ sobre la cual, la aplicación

$$T_i = T\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}}, \quad T : N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} \to N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$$

tenga como representación matricial a la matriz J_i. La base, cuya existencia se anuncia en dicho teorema, será la base ordenada obtenida de la unión

$$B_1 \cup \cdots \cup B_p.$$

Para hallar la base B_i del autoespacio generalizado $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$, nótese que la aplicación $T = \lambda_i I\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}} + (T - \lambda_i I)\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}}$ en cualquier base de $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ tiene la representación matricial,

$$J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i.$$

Como $(T - \lambda_i I)\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}}$ es nilpotente de índice ν_i (luego N_i será también nilpotente del mismo índice), sólo necesitamos hallar una base B_i sobre la que $(T - \lambda_i I)\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}}$ tenga la representación matricial que se anuncia en el teorema 19. Para ello se tiene el siguiente teorema; en el que T juega el papel de $(T - \lambda_i I)\big|_{N(T-\lambda_i I)^{\nu_i}}$, $\mathbb{C}^n$ juega el papel de $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ y el índice ν representa a ν_i.

Teorema 22.
Sea $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineal y nilpotente de índice ν . Entonces existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que la matriz de T en B tiene la forma

$$N = \begin{pmatrix} L_\nu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_\nu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_1 \end{pmatrix},$$

donde L_ν aparece r_1 veces, $L_{\nu-1}$ aparece r_2 veces, y así sucesivamente hasta L_1, que aparecerá r_ν veces. Además,

$$\begin{aligned} & r_1 = dim\ N(T^\nu) - dim\ N(T^{\nu-1}), \\ & r_1 + r_2 = dim\ N(T^{\nu-1}) - dim\ N(T^{\nu-2}), \\ & \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ & r_1 + \dots + r_{\nu-1} = dim\ N(T^2) - dim\ N(T) \\ & r + \dots + r_{\nu-1} + r_\nu = dim\ N(T) \end{aligned}$$

Demostración.
Como $N(T^{\nu-1}) \subset N(T^\nu) = \mathbb{C}^n$ existe H_1 tal que $N(T^\nu) = H_1 \oplus N(T^{\nu-1})$. Sea $B_1 = \{v_1^1, \dots, v_{r_1}^1\}$ una base arbitraria de H_1, entonces la familia $\{T(v_1^1), \dots, T(v_{r_1}^1)\}$ es linealmente independiente y está contenida en $N(T^{\nu-1}) \setminus N(T^{\nu-2})$, por eso es posible encontrar r_2 vectores $\{v_1^2, \dots, v_{r_2}^2\}$ (r_2 podría ser cero en algún caso) tales que,

$$B = \{T(v_1^1), \dots, T(v_{r_1}^1), v_1^2, \dots, v_{r_2}^2\}$$

genera H_2 cumpliendo $N(T^{\nu-1}) = H_2 \oplus N(T^{\nu-2})$. Repitiendo el proceso "ν" veces llegamos a una base de $N(T)$ que tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} B_\nu = \{ & T^{\nu-1}(v_1^1), \dots, T^{\nu-1}(v_{r_1}^1), T^{\nu-2}(v_1^2), \dots, T^{\nu-2}(v_{r_2}^2), \dots, \\ & T(v_1^{\nu-1}), \dots, T(v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}), v_1^\nu, \dots, v_{r_\nu}^\nu\}. \end{aligned}$$

Por tanto $B' = B_1 \cup \cdots B_\nu$ es una base de $\mathbb{C}^n$. Sin embargo, la base buscada B se deduce de B' efectuando la reordenación siguiente:

$$\begin{aligned} B = \{ & v_1^1, \dots, T^{\nu-1}(v_1^1), \overset{(r_1}{\dots}, v_{r_1}^1, \dots, T^{\nu-1}(v_{r_1}^1), \dots, \\ & v_1^{\nu-1}, T(v_1^{\nu-1})(v), \overset{(r_{\nu-1}}{\dots}, v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}, T^{(}v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}), v_1^\nu, \dots, v_{r_\nu}^\nu\}. \end{aligned}$$

Operaciones Elementales

Cuando una apicación lineal $T \in L(\mathbb{C}^n)$ tiene asociada una matriz $n \times n$, A, y se desean hallar simultáneamente la dimensión de $N(T)$, la dimensión de $T(\mathbb{C}^n)$, una base de $N(T)$ y una base de $T(\mathbb{C}^n)$ se aconseja proceder como sigue. Fórmese la matriz $2n \times n$

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \hline 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Mediante el método de Gauss y haciendo operaciones elementales columna - es decir intercambiar entre sí columnas y añadir a una columna dada una combinación lineal de otras - podemos pasar de dicha matriz a otra de la forma

$$\left(\frac{B}{D}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} b_{11} & \dots & b_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline d_{11} & \dots & d_{1r} & d_{1(r+1)} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2r} & d_{2(r+1)} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nr} & d_{n(r+1)} & \dots & d_{nn} \end{array}\right)$$

en la cual, B tiene rango r (y la estructura de la matriz de las primeras r columnas será triangular). En la matriz B las r primeras columnas dan una base del espacio imagen $T(\mathbb{C}^n)$, las últimas $n - r$ columnas de la matriz D dan una base del núcleo. Recuérdese que cada columna de la matriz B es la imagen por T de la correspondiente columna de D.

IV.4. Estructura de las soluciones de una ecuación lineal con coeficientes constantes

Como se ha establecido más arriba, para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}^n)$, la solución de

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

se puede escribir en la forma $x(t) = e^{tA}x_0$. Si J es la forma canónica de Jordan de A y P la matriz de “paso”, el cambio de variable $x = Py$ transforma el problema en

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = P^{-1}x_0 (= y_0) \end{cases}$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{tJ}y,$$

siendo

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_p} \end{pmatrix}$$

donde

$$e^{tJ_i} = \begin{pmatrix} e^{tL_{\nu_i}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tL_{\nu_i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tL_1} \end{pmatrix}$$

y donde

$$e^{tL_{\nu_i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!} & \frac{t^{\nu_i-2}}{(\nu_i-2)} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta estas observaciones es claro el siguiente teorema.

Teorema 25.
Sea $x = x(t)$ una solución de la ecuación

$$x' = Ax,$$

siendo A una matriz compleja $n \times n$ en las condiciones del teorema 19, en particular, con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, de índices $\nu_1, \dots, \nu_p$. Entonces, cada componente $x_j = x_j(t)$ de dicha solución se puede escribir en la forma,

$$x_j(t) = e^{\lambda_1} q_{1j} + \cdots + e^{\lambda_p} q_{1p}$$

donde cada $q_{ik}(t)$ es un polinomio de grado ν_k, $1 \le k \le p$.