CAPÍTULO III

ANÁLISIS MATEMÁTICO V

DEPENDENCIA CONTINUA Y DIFERENCIABLE DE LAS SOLUCIONES

1. Dependencia continua y aproximación de soluciones

Bajo ciertas condiciones el problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal definida en un intervalo (α, ω) (si $f(t,x)$ está definida en un abierto Ω). En este sentido la solución $x = x(t)$ y su dominio de definición (α, ω) dependen de los datos iniciales (t_0, x_0). Analícese una vez más con detalle el ejemplo $x' = x^2, x(t_0) = x_0$. Aquí estudiaremos cómo varían dichas soluciones con los datos iniciales y otras perturbaciones de la ecuación. La siguiente definición recoge la hipótesis mínima sobre $f(t,x)$ para el desarrollo del capítulo.

Definición. *Se dice que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continua $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, posee la propiedad de unicidad de soluciones si para cada (t_0, x_0) el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{P}$$

admite una única solución. Si (α, w) es el intervalo de existencia maximal algunas veces escribiremos la dependencia de α y ω con respecto a (t_0, x_0) en la forma $\alpha(t_0, x_0)$ y $w(t_0, x_0)$. Designaremos por

$$x = x(t, t_0, x_0)$$

a la única solución de (P) definida sobre su dominio de existencia maximal (α, ω). Definiremos dicha función como la solución general del problema de Cauchy. Designaremos por

$$\Theta = \{(t, t_0, x_0)/(t_0, x_0) \in \Omega, \quad t \in (\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0))\}$$

al dominio de la solución general.

Ejemplo. Si $f = f(t,x)$ es localmente Lipschitziana en x (p. e. si f es de clase C^1) entonces, como ya sabemos, f tiene la propiedad de unicidad de soluciones.

El siguiente resultado de tipo cualitativo expresa la continuidad de la solución general de (P).

Teorema de Peano: dependencia continua con respecto a datos iniciales. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua localmente Lipschitz*[1] *con respecto a x. Entonces se tiene que,*

a) $\Theta \subset \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto,*
b) $x = x(t, t_0, x_0)$ *es continua en $Theta$.*

El siguiente resultado incorpora la dependencia con respecto a parámetros. Es consecuencia del anterior.

Teorema de dependencia continua con respecto a parámetros. *Supongamos que $f = f(t, x, \lambda)$, $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \times \Lambda$ abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ es continua y localmente Lipschitz*[2] *con respecto a x. Sea $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la única solución del problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

y sea $\Theta = \{(t, t_0, x_0, \lambda)/(t_0, x_0) \in \Omega,\ \lambda \in \Lambda,\ t \in (\alpha(t_0, x_0, \lambda), \omega(t_0, x_0, \lambda))\}$ su dominio de definición. Entonces se tiene que,

a) $\Theta \subset \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ *es un conjunto abierto,*
b) $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ *es continua.*

Finalmente, el que sigue es un resultado más potente que los dos anteriores. Se hace patente de forma explícita que la hipótesis fundamental es la propiedad de unicidad de soluciones.

Teorema (Kamke, 1932). *Sean $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones continuas tales que $f_n \to f$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$ (es decir, para cada compacto $K \subset \Omega$, las restricciones de f_n a K convergen uniformemente a la restricción de f a K). Sea $\{(t_{0n}, x_{0n})\} \subset \Omega$ tal que $(t_{0n}, x_{0n}) \to (t_0, x_0)$. Sea (x_n, I_n) una solución maximal del problema*

$$\begin{cases} x' = f_n(t, x) \\ x(t_{0n}) = x_{0n} \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que $f = f(t, x)$ tiene la propiedad de unicidad de soluciones y que $x = x(t)$ es la solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que está definida (al menos) en el intervalo $[a, b]$. Entonces, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ la solución $x_n(t)$ está definida en $[a, b]$ (e.d. $[a, b] \subset I_n$) y además $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$.

Obsérvese que la demostración de los teoremas de Peano y dependencia paramétrica son consecuencia relativamente directa del teorema de Kamke.

[1] Basta con que tenga la propiedad de unicidad de soluciones
[2] Como antes, basta con que tenga la propiedad de unicidad de soluciones

Una vez se conocen los resultados cualitativos, cuando se tiene interés en información cuantitativa de las soluciones (por ejemplo, aproximaciones numéricas de las mismas), los siguientes resultados brindan las estimaciones adecuadas (pertenecen al ámbito general de la teoría de desigualdades diferenciales).

Lema (Gronwall, 1919). *Sea $c(t)$ y $d(t)$ funciones continuas, $d(t) \geq 0$, en el intervalo $[a,b]$. Si $y = y(t)$ es continua y satisface la desigualdad*

$$y(t) \leq c(t) + \int_a^t d(s)y(s)\, ds \quad \text{para} \;\; a \leq t \leq b$$

entonces,

$$y(t) \leq c(t) + \int_a^t c(s)d(s) \exp\left(\int_s^t d(\tau)\, d\tau\right)\, ds.$$

Si además, $c(t) \equiv c =$ constante entonces

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t d(s)\, ds\right).$$

En el siguiente resultado se supone conocido -a diferencia del teorema de Peano- el dominio $[a,b]$ donde están definidas dos soluciones aproximadas $x_1(t)$, $x_2(t)$ -es decir, no exactas- de una cierta ecuación *Lipschitz* $x' = f(t,x)$ de constante L (luego $x_i' = f(t,x_i) + e_i(t), i = 1,2$, donde $|e_i(t)| < \varepsilon_i$, siendo ε_i una cota del error en $[a,b]$) cuyos datos iniciales difieren una cierta cantidad. La conclusión establece una estimación de la diferencia entre las dos soluciones (conocida algunas veces como la "desigualdad fundamental").

Teorema (desigualdad fundamental). *Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ funciones diferenciables tales que*

$$|x_1(a) - x_2(a)| < \delta$$

y

$$|x_i'(t) - f_i(t, x_i(t))| < \varepsilon_i \quad (i = 1,2)$$

para $a \leq t \leq b$. Si la función f satisface la condicion de Lipschitz[3]

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| < L|x_1 - x_2|,$$

entonces

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[e^{L(t-a)} - 1]/L,$$

para $a \leq t \leq b$.

Observación. En las mismas condiciones, si las $x_i(t)$ están definidas a ambos lados de a, por ejemplo en $|t-a| \leq K$ la correspondiente estimación "bilateral" es:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L|t-a|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[e^{L|t-a|} - 1]/L.$$

Por otra parte, el resultado anterior puede establecerse usando también instantes iniciales diferentes para las soluciones aproximadas.

Demostración del teorema de Peano: un boceto. La idea clave consiste en probar primero la siguiente propiedad con interés en sí misma.

[3]En realidad sólo es necesario que la condición se dé en un entorno de las gráficas de ambas soluciones para $t \in [a,b]$. Es precisamente en estas condiciones como se aplica en la práctica el teorema 5.

Propiedad. *Sea f como en el teorema de Peano, $P_n = (t_{0n}, x_{0n})$, $P_0 = (t_0, x_0)$ tales que $P_n \to P_0$. Sean asimismo $x(t) = x(t, P_0)$, $x_n(t) = x(t, P_n)$ las correspondientes soluciones de $x' = f(t, x)$ con datos iniciales en P_0 y P_n. Entonces, si $x(t)$ está definida en un intervalo $[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, las $x_n(t)$ también estarán definidas en dicho intervalo de un n_0 en adelante, teniéndose que:*

$$x_n \to x,$$

uniformemente en $[a, b]$.

Demostración de la propiedad. Consideramos el arco:

$$\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [a, b]\}.$$

Para cada $P \in \Gamma$ tomamos el tonel $\overline{Q}_{h,R}(P) = [t - h, t + h] \times \overline{B}_R(x) \subset \Omega$ de suerte que f está acotada por M en la unión:

$$\cup_{P \in \Gamma} \overline{Q}_{h,R}(P).$$

Trabajamos con el intervalo $[t_0, b]$ procediéndose en $[a, t_0]$ de manera similar. Sabemos que $x(t) = x(t, P)$ está definida en el intervalo $I_0 = [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ con $h_0 = \min\{h, \dfrac{R}{M}\}$. A partir de un n_1 los toneles:

$$\overline{Q}_{h/2,R/2}(P_n) \subset \overline{Q}_{h,R}(P),$$

estando las $x_n(t) = x(t, P_n)$ definidas en los intervalos $\dfrac{1}{2} I_0(t_{0n}) = [t_{0n} - \dfrac{1}{2} h_0, t_{0n} + \dfrac{1}{2} h_0]$. Como $t_{0n} \to t_0$ tendremos que a partir de un n_2:

$$\frac{1}{2} I_0 = [t_0 - \frac{1}{2} h_0, t_0 + \frac{1}{2} h_0] \subset \frac{1}{2} I_0(t_{0n}).$$

Así, tanto x como las x_n estarán definidas en el intervalo común $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$ donde $h_1 = h_0/4$. En dicho intervalo se tiene:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x)\, ds,$$

$$x_n = x_{0n} - \int_{t_0}^{t_{0n}} + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n)\, ds,$$

luego:

$$|\Delta x_n| \leq |\Delta x_{0,n}| + M |\Delta t_{0n}| + L \int_{t_0}^{t} |\Delta x_n|\, ds,$$

en $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$ con $\Delta x_n = x_n - x$, $\Delta x_{0,n} = x_{0n} - x_0$ y $\Delta t_{0n} = t_{0n} - t_0$. La desigualdad fundamental establece entonces que:

$$x_n(t) \to x(t),$$

uniformemente en $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$.

Nos fijamos ahora que volvemos a tener la misma situación en $t_0' = t_0 + h_1$ con la familia de datos $P_n' = (t_0', x_{0n}')$, $P_0' = (t_0', x_0')$, donde $x_{0n}' = x_n(t_0+h_1)$, $x_0' = x(t_0+h_1)$. Repitiendo el argumento concluimos que las $x_n(t)$ están definidas para $n \geq n_3$ en el intervalo contiguo $[t_0 + h_1, t_0 + 2h_1]$ con la misma h_1, teniéndose la convergencia uniforme:

$$x_n(t) \to x(t),$$

en la totalidad del intervalo $[t_0 - h_1, t_0 + 2h_1]$. Es evidente que procediendo en un número finito de pasos cubrimos el intervalo $[t_0, b]$, estando definidas las x_n en el mismo para n superior a un n_0 (mayor que los otros n_i) obteniéndose allí la convergencia uniforme $x_n \to x$. Esto completa la prueba en la totalidad de sus detalles. $\square$

2. Diferenciabilidad con respecto a los datos iniciales

En la presente sección supondremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^k con $k \geq 1$ sobre un conjunto abierto Ω. Obsérvese que ello conlleva la propiedad de unicidad de soluciones para $f = f(t, x)$. Vamos a establecer que en estas condiciones la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy es también una función C^k (C^{k+1} con respecto a la primera variable t). Sin embargo, lo notable es que cada una de las derivadas parciales de la solución general $\dfrac{\partial x}{\partial \zeta}(t, t_0, x_0)$ (donde ζ puede ser cualquiera de las variables t, t_0, x_{0i}) considerada como función de t satisface otra vez un problema de Cauchy explícito.

Teorema: dependencia diferenciable. *Supongamos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 sobre el conjunto abierto Ω. Entonces $x = x(t, t_0, x_0)$ es de clase C^1 sobre Θ (véase la definición de Θ). Además,*

a) $Y(t) = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ *es la solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} Y' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t))\, Y \\ Y(t_0) = I, \end{cases}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$ y $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$.

b) $z(t) = \dfrac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ *es la solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} z' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t))\, z \\ z(t_0) = -f(t_0, x_0), \end{cases}$$

donde, como arriba, $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Corolario. *En el teorema anterior se puede remplazar C^1 por C^k (incluso con $k = \infty$). Además, las derivadas parciales de orden superior de $x(t, t_0, x_0)$, consideradas como funciones de t satisfacen problemas de Cauchy análogos a los del teorema precedente.*

Corolario: dependencia de parámetros. *Supongamos que* $f : \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *es una función de clase* C^k, $k \geq 1$, *sobre el conjunto abierto* $\Omega \times \Lambda$. *Entonces* $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ *es de clase* C^k *sobre* Θ *(véase la definición de* Θ*). Además, todas las derivadas parciales de* $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ *de orden superior, consideradas como funciones de* t*, satisfacen ciertos problemas de Cauchy que se pueden determinar. En particular* $U(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ *es la solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} U' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), \lambda)U + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_0(t), \lambda) \\ U(t_0) = 0, \end{cases}$$

donde $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$ *y* 0 *representa aquí la matriz nula de dimensiones* $n \times k$.

Ejemplo. Si consideramos el problema de Cauchy escalar ($x \in \mathbb{R}$) con un parámetro real ($\lambda \in \mathbb{R}$) y queremos calcular la derivada de orden dos:

$$x_{x_0\lambda}(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial \lambda}(t, t_0, x_0),$$

diferenciando una vez la ecuación obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x_{x_0}\right) = f'_x(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0}.$$

Derivando otra vez con respecto de λ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x_{x_0\lambda}\right) = f'_x(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0\lambda} + f''_{xx}(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0}x_\lambda + f''_{x\lambda}(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0},$$

en donde ahora $x_{x_0\lambda}$ es la función incógnita, $x_{x_0} = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}$ y $x_\lambda = \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}$ ya se han calculado previamente. Nótese que como además $x_{x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 1$ entonces $x_{x_0\lambda}$ satisface la condición inicial,

$$x_{x_0\lambda}(t_0) = x_{x_0\lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0.$$