Análisis Matemático V. Curso 2002-2003.

Capítulo IV.

Nota. Los ejercicios marcados con (*) son más teóricos y pueden abordarse cuando se tenga más experiencia en la parte práctica.

1. Sea $A = A(t)$ una función matricial continua con $t \in J$, $J = (a, b)$ y $A(t) \in M_{n\times n}$. Sea por otra parte $X(t) = \text{col}\,[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ con las $x_i : J \to \mathbb{R}^n$ derivables. Pruébese que se satisface la ecuación matricial $X' = AX$ si y sólo si cada una de las x_i satisface la ecuación $x' = Ax$.

2. (*) Sea $X : (a, b) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial diferenciable en el intervalo (a, b). Demuéstrese que si X es invertible en (a, b), X^{-1} es diferenciable con:

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}X'X^{-1}.$$

3. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluar $\operatorname{sen} A$, $\cos A$, $\exp A$.

4. (*) Sea $Y : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial continua que cumple la propiedad de semigrupo, es decir:

$$Y(t + s) = Y(t)Y(s) \qquad t, s \in \mathbb{R},$$

junto con $Y(0) = I$. Demuéstrese que Y es diferenciable en $\mathbb{R}$ con

$$Y' = AY,$$

donde A es cierta matriz, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5. Se considera la serie $s(\lambda) = \lambda + \lambda^2 + \cdots$ ¿Bajo qué condiciones se puede definir $s(A)$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

6. Se considera la familia de funciones $\mathcal{S} = \{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_p t}\}$ donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Pruébese que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente en $C(\mathbb{R})$. La misma cuestión si consideramos la familia ligeramente más grande, $\mathcal{S}_1 = \{e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, \dots, e^{\lambda_p t}, \dots, t^{m_p-1}e^{\lambda_p t}\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

7. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soluciones de la ecuación de orden n y coeficientes continuos:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \tag{1}$$

definidas en el intervalo (a,b). Pruébese que $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si el Wronskiano $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\neq 0$ en cada punto del intervalo (a,b). A tales efectos utilícense los correspondientes resultados para sistemas tras reconvertir (1) a dicho formato.

8. Supongamos ahora que los coeficientes de (1) son constantes: $a_i(t)=a_i$ mientras:

$$p(\lambda):=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}.$$

Pruébese que la familia $\mathcal{S}_1$ del problema 6 define un sistema fundamental de soluciones. Si los a_i son todos reales y λ es una raíz compleja $\lambda=\alpha+i\beta$ de p con multiplicidad m, como $\bar\lambda$ también es raíz, pruébese que la substitución en todos los casos de raíces complejas λ del grupo $\{e^{\lambda t},\dots,t^{m-1}e^{\lambda t},e^{\bar\lambda t},\dots,t^{m-1}e^{\bar\lambda t}\}$ por

$$\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\dots,t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t,\dots,t^{m-1}e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\}$$

da lugar a un sistema fundamental de soluciones real.

9. Calcúlese un sistema fundamental de soluciones para las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
x''+x'-6x= & x^{iv}+5x''-36x=0\\
x'''+2x''-5x'-6x=0 & x''-2x'+5x=0\\
x^{(iv)}-x'''-9x''-11x'-4x=0 & x'''+4x=0\\
x^{(vi)}+9x^{(iv)}+24x''+16x=0 & (D^2-2D+5)^2x=0.
\end{array}$$

10. Las ecuaciones de la forma:

$$t^nx^{(n)}+a_1t^{(n-1)}x^{(n-1)}+\cdots+a_0x=0,$$

se llaman ecuaciones de Euler. Se reducen a coeficientes constantes mediante el cambio de variable:

$$t=e^\tau.$$

De acuerdo con esta estrategia hállese en los siguientes casos un sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones correspondientes.

$$\begin{array}{ll}
t^2x''-3tx'+4x=0 & (t+1)^2x''+(t+1)x'-x=0\\
t^2x''-2tx'+2x=0 & (2t+1)^2x''-2(2t+1)x'-12x=0\\
t^3x'''+tx'-x=0. &
\end{array}$$

11. (*) (Métdo de variación de las constantes: ecuaciones escalares). Sea $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0. \tag{1}$$

Considérese la función $x(t)$ definida por

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n(t),$$

donde las $c_i(t)$ satisfacen el sistema:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Para $f \in C(a,b)$ demuéstrese que tal $x(t)$ define una solución de la ecuación no homogénea:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t).$$

Como aplicación calcúlese una solución de las ecuaciones:

$x''' + 3x'' - 4x = te^{-2t}$
$x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t$
$y''' - 8y = e^{ix}$
$y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$
$y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}$.
$x'' + (a+b)x' + abx = f(t)$
$y''' - y' = x$
$y^{(iv)} + 16y = \cos x$
$y^{(iv)} - y = \cos x$

12. (Método de coeficientes indeterminados). Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$ los operadores diferenciales lineales de coeficientes constantes:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \qquad \mathcal{L}_1 = \sum_{l=0}^{m} b_l D^l.$$

El objetivo del problema es hallar una solución particular de la ecuación:

$$\mathcal{L}x = f(t). \tag{2}$$

Para ello se admite que existe un operador $\mathcal{L}_1$ (cuyos coeficientes habrá que determinar en la práctica para una f dada) tal que

$$\mathcal{L}_1(f) = 0. \tag{3}$$

a) Demuéstrese que si $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{L}_2 x = 0$ si x satisface (2).
b) Demuéstrese que el polinomio característico de $\mathcal{L}_2$ es el producto de los correspondientes polinomios de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$.
c) Sea x la solución general de $\mathcal{L}_2(x) = 0$ ¿Será también x solución de (2)? Dése un ejemplo de que la respuesta es en general negativa.

d) Utilícense las ideas precedentes para hallar una solución particular de las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
y'' + 4y = \cos x & y'' - y' - 2y = x^2 + \cos x \\
y'' + 4y = \text{ sen } 2x & y'' + 9y = x^2 e^{3x} \\
y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x} & y'' + y = xe^x \cos 2x \\
y'' + iy' + 2y = 2\cosh 2x + e^{-2x} & y''' = x^2 + e^{-x} \text{ sen } x\,. \\
y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x} &
\end{array}
$$

13. Sea $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$ un operador diferencial de coeficientes constantes $a_k \in \mathbb{C}$, p supolinomio característico.

(1) Calcúlese una solución particular de la ecuación:

$$\mathcal{L}(x) = e^{at}$$

suponiendo $p(a) \neq 0$ (ensayar $x = Ae^{at}$).

(2) La misma cuestión si $p(a) = 0$ (en este caso ensáyese $x = At^m e^{at}$).

14. Se considera la función:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0] \\ 1 & x \in [0, \pi] \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}\ ,$$

y el operador diferencial $\mathcal{L}y = y'' + y$. Hallar una solución de $\mathcal{L}y = f$ en los puntos de continuidad de f.

15. Se considera el operador:

$$\mathcal{L}y = y'' + a_1 y' + a_2 y \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Sea ω tal que $p(\pm i\omega) \neq 0$ con p el polinomio característico de $\mathcal{L}$.

(1) Demuéstrese que para $A \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega x}$ admite una solución de la forma:

$$\phi(x) = \frac{a}{|p(i\omega)|} e^{i(\omega x - \alpha)},$$

donde $p(i\omega) = |p(i\omega)| \exp(i\alpha)$.

(2) Sea $\phi = \phi(x)$ una solución de $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega x}$ mientras $\phi_1 = \Re\phi$, $\phi_2 = \Im\phi$. Pruébese que $\mathcal{L}(\phi_1) = A\cos\omega x$, $\mathcal{L}(\phi_2) = A \text{ sen } \omega x$.

(3) Sean L, R, C, E, ω constantes positivas. Pruébese que la ecuación

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C} y = E\cos\omega x,$$

admite una solución de la forma $\phi(x) = B\cos(\omega x - \alpha)$.

(4) Supóngase que $R^2 C < 2L$. Hállese el valor de ω para el que B es máximo en (3).

16. (El fenómeno de la resonancia). Se considera la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = A\cos\omega x \qquad A > 0, \omega > 0.$$

(1) Calcúlense sus soluciones en $t \geq 0$.
(2) Estúdiese el comportamiento de las soluciones cuando $t \to +\infty$.
(3) Dibújese la gráfica de la solución $\phi(x)$ correspondiente a $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$.

17. Supongamos que las dos raíces del polinomio característico del operador lineal $\mathcal{L}y = y'' + a_1 y' + a_2 y$ están en el semiplano $\Re z < 0$ mientras $b \in C[0, +\infty)$ satisface $\sup_{t\geq 0} |b(t)| < +\infty$.

(1) Pruébese que toda solución de $\mathcal{L}y = b$ está acotada en $t \geq 0$.
(2) Demuéstrese que si $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$ entonces toda solución de $\mathcal{L}y = b$ también satisface la condición $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

18. Calcular la forma canónica de Jordan, la matriz de paso y la exponencial e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, de las siguientes matrices,

(1)
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(2)
$$A = \begin{pmatrix} a-b & b \\ -2b & a+b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(3)
$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & -1 \\ 1 & 2a-1 \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de a es nilpotente la matriz?

19. Hallar la solución general del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

para las elecciones: A cada una de las matrices del ejercicio anterior, $t_0 = 0$, $x_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $b(t) = (t, t^2)$, $b(t) = (\cos t, 0)$, $b(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t)$.

20. Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Calcular e^A y como aplicación e^{A_1}.

21. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Hállese la solución general del problema de Cauchy procediendo de la forma siguiente:

(1) Redúzcase el sistema a una ecuación de segundo orden.
(2) Hállese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación resultante para producir una matriz fundamental normalizada en $t = 0$.
(3) Dése una solución alternativa al ejercicio anterior

22. Calcúlese la forma canónica de Jordan J, una matriz de paso P y la exponencial e^{tA} de cada una de las siguientes matrices 3×3.

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(6)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(7)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

23. Resuélvanse los problemas de Cauchy siguientes (cotejar los resultados del ejercicio anterior):

(1)

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = 2x + 3y + z + \operatorname{sen} t \\ z' = 2x - y + 5z \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x' = 3x + z + e^t \\ y' = 3y + t \\ z' = y + 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = -1. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x' = 3x - z \\ y' = 4y + z \\ z' = -2y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = \alpha \\ y(0) = \beta \\ z(0) = \gamma, \end{cases}$$

donde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. ¿Pueden ser complejos α, β, γ?

24. Resolver las cuestiones del ejercicio 22 para las matrices que se indican.

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(9)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a-b & b & 0 & 0 \\ -2b & a+b & 0 & 0 \\ 1-2b & b & a-b & b \\ -2b & 2b+1 & -2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(11)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(13)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

25. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2' = 2x_2 + x_4 \\ x_3' = 2x_3 + x_4 \\ x_4' = 2x_4. \end{cases}$$

a) Calcúlese una matriz fundamental, hallando la solución general del problema de Cauchy con datos en $t_0 = 0$ y término de perturbación

$$b(t) = (1, t, 0, \text{ sen } t).$$

b) Hállese la solución del problema homogéneo ($b = 0$) sin recurrir a la matriz fundamental.

26. Hállese la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\ x_3' = x_3 - 2x_4 \\ x_4' = x_3 + 3x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = a \\ x_2(0) = b \\ x_3(0) = c \\ x_4(0) = d, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

27. Se considera el sistema lineal,

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 \\ x_3' = 3x_3 - 3x_4 \\ x_4' = 6x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Analícense sus soluciones periódicas ¿Cuántos tipos de soluciones periódicas admite?

28. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demuéstrese que:

$$\det e^{At} = e^{(\text{traza } A)t} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

29. El siguiente resultado tiene interés en *teoría de control*. Decimos que una función f es continua a trozos en el intervalo $[a,b]$ si existen puntos $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ con f continua en cada (t_{i-1}, t_i) y de forma que f admite límites laterales en cada uno de los t_i (en a sólo se requiere la existencia de $f(a+)$, en b, la de $f(b-)$). Sean $A = A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $b = b(t) \in \mathbb{C}^n$ aplicaciones continuas a trozos en $[a,b]$. Fijado $t_0 \in [a,b]$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$, pruébese la existencia de una solución continua y C^1 a trozos del problema:

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que está definida en todo el intervalo $[a,b]$. Pruébese asimismo que la solución se representa en la forma $x = \Phi(t)x_0$ donde $\Phi \in M_{n\times n}$ es una matriz fundamental continua y C^1 a trozos.

Ecuaciones de segundo orden

30. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{1}$$

donde los cofecientes son funciones continuas definidas un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Búsquese una función ϕ de forma que al introducir la nueva función incógnita y_1 ligada a y bajo la relación $y = \phi y_1$, la ecuación resultante en y_1 no presente el término en la derivada primera y_1', es decir para que (1) se transforme en:

$$y_1'' + \alpha(x)y_1 = 0.$$

31. Pruébse que la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

admite una solución u de la forma:

$$u = \exp \int_{x_0}^{x} p(s)\ ds$$

si y sólo si $p = p(x)$ satisface la ecuación de Riccati:

$$y' = -y^2 - a_1(x)y - a_2(x).$$

Este resultado viene a decir que las ecuaciones lineales de segundo de orden no son en general integrables elementalmente.

32. Sean $\{\phi_1, \phi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$ sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

mientras $W(\phi_1,\phi_2)$, $W(\psi_1,\psi_2)$ son los correspondientes wronskianos. Mediante cómputo directo demuéstrese que:

$$W(\phi_1,\phi_2)=kW(\psi_1,\psi_2),$$

para cierta constante k. ¿Por qué ya resulta conocida esta conclusión?.

33. (*) Se considera la ecuación de Hill,

$$y''+\alpha(t)y=0,$$

donde $\alpha=\alpha(t)$ es periódica de período T. Sea $\{\phi_1,\phi_2\}$ un sistema fundamental de soluciones normalizado en $t=0$, mientras $W=W(\phi_1,\phi_2)$ designa su wronskiano.

(1) Probar que $W(t)=1$.
(2) Probar que la ecuación admite una solución periódica (no trivial) de período T si y sólo si $\phi_1(T)+\phi_2'(T)=2$. Similarmente, pruébese que la ecuación admite una solución y que cumple $y(t+T)=-y(t)$ para cada t si y sólo si $\phi_1(T)+\phi_2'(T)=-2$.

34. (*) (Teorema de Sturm). Se consideran las ecuaciones de segundo orden:

$$y''+a(x)y=0, \tag{1}$$

$$y''+b(x)y=0, \tag{2}$$

cuyos coeficientes son funciones continuas en un intervalo (α,β) donde b mayora estrictamente a a, es decir $a(x)<b(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$. Sea y_a una solución arbitraria de (1) que admite dos ceros consecutivos $x_1<x_2$ en el intervalo (α,β). Demuéstrese que *toda* solución y_b de (2) exhibe un cero en el intervalo (x_1,x_2). Para ello pruébese que

$$(y_by_a'-y_b'y_a)'=(b-a)y_ay_b.$$

Lo que lleva, cualquiera que sea y_b a la relación:

$$y_b(x_2)y_a'(x_2)-y_b(x_1)y_a'(x_1)>0,$$

de lo que debe deducirse que y_b debe anularse en (x_1,x_2). Como aplicación probar que todas las soluciones de la ecuación $y''+xy=0$ presentan infinitos ceros en el intervalo $(0,+\infty)$.

35. Con las ideas del problema anterior demostrar si y_1, y_2 son dos soluciones independientes de la ecuación:

$$y''+a(x)y=0,$$

entonces, entre dos ceros consecutivos de y_1 existe un único cero de y_2.

36. Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$y''+\frac{1}{4x^2}y=0,$$

en $x > 0$ sabiendo que $y_1 = x^{1/2}$ es una solución. Para ello obsérvese que si se conoce una solución particular ϕ de una ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

el cambio $y = \phi y_1$ permite reducir en una unidad el orden de la ecuación.

37. Considérese la ecuación.

$$y'' + a(x)y = 0,$$

donde a es continua en $x > 0$. Pruébese que si $a(x) > \varepsilon > 0$ todas sus soluciones oscilan infinitas veces en $x > 0$. Pruébese sin embargo que para que se dé este comportamiento no basta con la condición más débil $a(x) > 0$.