Análisis Matemático V. Curso 2002-2003.

Capítulo III.

---

1. Se considera el problema:

$$\begin{cases} y' = y + \lambda x^2 \operatorname{sen} y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Pruébese que admite una única solución definida en todo $\mathbb{R}$. Hállese una estimación del error cometido cuando la solución se substituye por la del problema:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $|x| \leq 1$.

2. Se considera:

$$\begin{cases} y' = t + y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{P}$$

y el problema aproximado,

$$\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{P_0}$$

a) Suponiendo que la solución de (P) está definida en el intervalo $[0, l]$, satisfaciendo $|y(t)| \leq K$, $K > 0$, hállese una estimación del error cometido al substituir la solución de (P) por la de (P_0).

b) Si $y(t)$ es la solución de (P) prúebese que $y(t) > 1$, $y'(t) > 0$, $y''(t) > 0$ para $t > 0$. Probar que,

$$y(t) > 1 + (1 + \varepsilon)t \qquad t > 0.$$

c) Pruébese que la solución $y(t)$ de (P) satisface:

$$y' \geq \varepsilon y^2 \qquad t > 0,$$

por lo que el intervalo maximal de existencia a la derecha $[0, \omega)$ es finito y cumple $\omega \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

d) Pruébese que la solución $y(t)$ de (P) satisface:

$$y' \leq A(\varepsilon) y^2 \qquad t > 0,$$

con $A(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \dfrac{1}{1+\varepsilon}$. Dedúzcanse de ahí valores para l y K en el apartado a).

3. Se consideran los problemas:

$$\begin{cases} y' = xy + y^{10} \\ y(0) = \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = xy \\ y(0) = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

(1) Prúebese que la solución $y(x)$ del primero está definida en $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ en donde satisface $|y(x)| \leq \dfrac{1}{5}$.

(2) Demuéstrese que una estimación del error al aproximar el primer problema por el segundo es:

$$|y(x) - \frac{1}{10}e^{x^2/2}| \leq \frac{2}{5^{10}}(e^{|x|/2} - 1).$$

4. La desigualdad de Gronwall establece que si:

$$y(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t b(s)y(s)\, ds \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \tag{1}$$

donde a, b, y son continuas, $b \geq 0$, entonces,

$$y(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\sigma)\, d\sigma}\, ds \qquad \alpha \leq t \leq \beta. \tag{2}$$

Pruébese que si a es C^1 y $a' \geq 0$ en $[\alpha, \beta]$ entonces (1) implica la siguiente versión mejorada de (2):

$$y(t) \leq a(t)e^{\int_\alpha^t b(s)\, ds}.$$

5. Supongamos que $f = f(x, y, \lambda)$ está definida en $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es C^1 y satisface:

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda)| \leq L \qquad |\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda)| \leq K,$$

$x \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $y = y(x, \mu)$ la solución de:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el intervalo $[a, b]$. Pruébese que:

$$|y(x, \lambda) - y(x, \mu)| \leq \frac{K}{L}|\lambda - \mu|(e^{L|x-a|} - 1).$$

6. Se considera la familia de problemas:

$$\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{1}{n^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

y el problema límite:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pruébese que mientras las soluciones de los primeros están definidas en el intervalo $[0,1]$ independientemente de n, la del problema límite sólo lo está en $[0,1)$. Este ejemplo prueba que los dominios de existencia de las soluciones aproximadas no dan información sobre el dominio de existencia de la solución del problema límite (comparar con los resultados teóricos expuestos).

7. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite la solución $x = \operatorname{sen} t$. Demuéstrese que para n suficientemente grande la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) + \dfrac{1}{n} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene al menos dos ceros en el intervalo $(0, 2\pi)$.
Indicación. Es relativamente sencillo probar que hay un cero en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para encontrar un segundo cero demuéstrese que $x_n(t) > x(t)$ para todo n y todo $t \in (0, 2\pi]$.

8. Se considera la familia de funciones:

$$f_n(x,t) = \frac{\operatorname{sen} t \operatorname{sen} nx}{n^2}.$$

(1) Hállese el límite de la sucesión $f_n(x,t)$ justificando que el límite es uniforme en $\mathbb{R}^2$.
(2) Para $f = \lim f_n$ hállese la solución de,

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(3) ¿Qué se puede decir de la solución x_n del problema:

$$\begin{cases} x' = f_n(t,x) \\ x(0) = \dfrac{1}{n^2}? \end{cases}$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, designando por $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Admitamos que para $\lambda = \lambda_0$, $x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ presenta k ceros simples en el intervalo (a, b). Pruébese que $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ también exhibe k ceros simples en dicho intervalo siempre que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

10. Se considera el problema:

$$\begin{cases} x'' + \varepsilon x' + \operatorname{sen} x = 0 \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = x_0', \end{cases} \qquad |x_0| < \frac{\pi}{2}.$$

(1) Pruébese que las soluciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ y que además satisfacen la desigualdad:
$$\frac{1}{2}{x'}^2 + 1 - \cos x \leq \frac{1}{2}{x_0'}^2 + 1 - \cos x_0,$$
para $t \geq 0$.

(2) Utilícese la desigualdad para estimar el error cometido cuando la solución del problema se aproxima por la del problema,

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = x_0', \end{cases}$$

que como bien se sabe viene dada explícitamente por $x(t) = x_0 \cos t + x_0' \operatorname{sen} t$.

11. En los problemas que siguen $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ representa la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(1) Calcúlense, justificando su existencia, todas las derivadas parciales de primer orden de $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ en $(t, t_0, x_0, \lambda) = (t, t_0, x_0, 0)$, siendo $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la solución general del problema:
$$\begin{cases} x' = x^2 + \lambda x^3 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(2) Los mismos cálculos para:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x-1)^2}{2} + \lambda e^t \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0, λ), $x_0 = 1$, $\lambda = 0$.

(3) La misma cuestión para:

$$\begin{cases} x' = x(1-x)(x-\alpha) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0), $x_0 = \alpha$.

(4) Calcular las derivadas de primer orden de la solución general $x(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ del problema,

$$\begin{cases} x' = x^2 + \varepsilon t^2 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en $\varepsilon = 0$.

(5) La misma cuestión para la solución general del problema:

$$\begin{cases} x' = x(\mu - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en los puntos $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, 0)$, $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, \mu)$.

12. Sea $x(t, t_0, x_0, x_0', \varepsilon)$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x'' + \varepsilon {x'}^2 + x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = x_0'. \end{cases}$$

Hállense todas las derivadas parciales de primer orden de $x(t, t_0, x_0, x_0', \varepsilon)$ para $\varepsilon = 0$.

13. (*) Sea $A = A(t)$ una función matricial continua definida en $\mathbb{R}$ mientras $x = x(t, y)$ es la solución de:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = y. \end{cases}$$

Si $X(t) = \dfrac{\partial x}{\partial y}(t, y)$, prúebese que X satisface:

i) $X(0) = I$ (la matriz identidad $n \times n$).

ii) $X'(t) = A(t)X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

14. Para $f = f(t, x, \lambda)$ de clase C^2 en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hállense algunas de las derivadas parciales de segundo orden de la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_0) = x_0$.

15. Sea $f \in C^1(\Omega)$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Demúestrese que existe la derivada $\partial x/\partial x_0$ de la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_0) = x_0$, estableciendo asimismo que la función $z(t) = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ es la solución de la ecuación variacional $z' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0))z$ sometida a la condición inicial $z(t_0) = 1$.

16. (*) Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 & x_1(0) = y_1 \\ x_2' = -x_2 + x_1 & x_2(0) = y_2 \\ x_3' = x_3 + x_1 & x_3(0) = y_3. \end{cases}$$

Hállese la solución $x = x(t, y)$ y pruébese que si $f(x)$ designa el segundo miembro de la ecuación entonces $X_1(t) = \dfrac{\partial x}{\partial y}(t, y)$ es una función matricial que satisface:

i) $X_1'(t) = A(t)X_1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ donde $A(t) = f'(x(t, y))$.
ii) $X_1(0) = I$ (la matriz identidad $n \times n$).

17. El problema

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

se toma como aproximación de

$$\begin{cases} y' = y + \lambda \dfrac{y}{1+y^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $|x| \leq 1$ Hállese una estimación del error.

18. (*) Hállese la solución $x = x(t, y)$ del problema:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 & x_1(0) = y_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 & x_2(0) = y_2 \\ x_3' = x_1 + 3x_2 - x_3 & x_3(0) = y_3 \\ x_4' = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & x_4(0) = y_4. \end{cases}$$

evaluando asimismo la derivada parcial $\dfrac{\partial x}{\partial y_1}(t, y)$.

19. (*) Sea $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - xy \\ y' = -y + xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Hállense las derivadas $x_1(t) = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, 1, 0)$, $y_1(t) = \dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t, 1, 0)$.

NOTA. Los problemas marcados con (*) pueden aplazarse, si así se desea, hasta que tratemos las ecuaciones lineales.