1. Calcular las áreas de las siguientes superficies:

   (a) $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

   (b) $y = x^2 + z^2 - 1$, $0 \leq y \leq 3$.

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

   Solución: (a) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$; (b) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$; (c) $2\pi a^2$.

2. Calcular el área de la superficie σ: $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen} u$ $(0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq v \leq u)$.

   Solución: $\frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

3. Hallar las áreas de las superficies siguientes:

   (a) El tronco de cono de ecuación $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ correspondiente a bases de radios b, c, con $b < c$.

   (b) La superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ limitada por el cilindro $x^2 + 4y^2 = 9$.

   Solución: (a) $\pi\sqrt{1 + a^2}(c^2 - b^2)$; (b) 12π.

4. Hallar el área del toro circular obtenido al girar una circunferencia de radio R alrededor de un eje situado en el plano en que se encuentra la circunferencia y a una distancia $a > R$ de su centro.

   Solución: $4\pi^2 aR$.

5. Evaluar $\int_S xyz \, dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$.

   Solución: $\frac{\sqrt{6}}{30}$.

6. Evaluar $\int_S z^2 \, dS$, siendo C la frontera del cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

   Solución: $\frac{40}{3}$.

7. Calcular $\int_\sigma (x^2 + y^2) \, d\sigma$, siendo σ la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, con $0 \leq z \leq 3$.

   Solución: 9π.

8. Sea σ la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$. Hallar $\int_\sigma (x^2 + y^2) \, d\sigma$.

   Solución: $\frac{4\pi a^4}{3}$.

9. Se considera el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{k}$. Hallar $\int_\sigma F \cdot d\sigma$, donde σ es la superficie de ecuaciones paramétricas $x = \cos u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \cos v$, $z = \frac{1}{2} \operatorname{sen} v$, para $0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2}$.

   Solución: $\frac{5}{6}$.

10. Sea σ la superficie de ecuaciones paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, para $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Sea el campo vectorial $R = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el flujo de R a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: $\frac{81\pi}{8}$.

11. Sea σ la porción de superficie cilíndrica $x = 3\cos\theta$, $y = 3\ \mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$ $(0 \le \theta \le \pi,\ -3 \le z \le 3)$, y sea el campo vectorial $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar el flujo de F a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: 54π.

12. Calcular $\oint_\gamma 2y\,dx + 3x\,dy - z^2\,dz$, siendo γ la circunferencia de ecuaciones paramétricas $x = 3\cos\lambda$, $y = 3\ \mathrm{sen}\,\lambda$, $z = 0$, para $0 \le \lambda \le 2\pi$.

    Solución: 9π.

13. Sea S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Comprobar que se verifica el teorema de Stokes para $F = (yz, xz, xy)$.

14. Evaluar $\int_S (\nabla \times F)\cdot dS$, donde $F = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$:

    (a) directamente;

    (b) mediante el teorema de Stokes.

    Solución: -16π.

15. Evaluar $\int_S (\nabla \times F)\cdot dS$, donde S es la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tal que $x + y + z \ge 1$, y $F = (x, y, z) \times (1, 1, 1)$.

    Solución: $-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

16. Hallar $\int_S (\nabla \times F)\cdot dS$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $F = (\ \mathrm{sen}\,xy, e^x, -yz)$.

    Solución: 0.

17. Sea V un sólido de volumen 13 unidades limitado por la superficie cerrada σ. Sea R el campo vectorial definido por el vector de posición: $R(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar $\oint_\sigma R \cdot d\sigma$.

    Solución: 39.

18. Se consideran el campo vectorial $F = xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ y la superficie σ, contorno del sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 3\right\}.$$

    Calcular el flujo $\int_\sigma F \cdot d\sigma$:

    (a) por medio del teorema de la divergencia;

    (b) directamente.

    Solución: $-\frac{3\pi}{2}$.

19. Se consideran el casquete de paraboloide $\sigma : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$ y el campo vectorial

$$F = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}.$$

    Hallar el flujo de F a través de σ hacia el exterior del paraboloide.

    Solución: 2π.

20. Sea $F = (y, z, xz)$. Evaluar $\int_{\partial\Omega} F \cdot dS$ para cada una de las siguientes regiones Ω:

    (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;

    (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0$;

    (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \leq 0$.

    Solución: (a) 0; (b) $\frac{4}{15}$; (c) $-\frac{4}{15}$.

21. Calcular $\int_S F \cdot dS$, donde $F = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ y S es la esfera unidad.

    Solución: $\frac{12\pi}{5}$.

22. Evaluar $\int_S F \cdot dS$, donde $F = \left(1, 1, z(x^2 + y^2)^2\right)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

    Solución: $\frac{\pi}{3}$.

23. Sea $F = (2yz, -x + 3y + 2, x^2 + z)$. Calcular $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq 1$: (a) incluyendo las bases; (b) excluyendo las bases.

    Solución: (a) 0; (b) $2\pi a^2$.

24. Sea S la superficie cerrada formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$. Sea también $E = (2x, 2y, 2z)$ un campo eléctrico definido en $\mathbb{R}^3$. Hallar el flujo de E a través de S.

    Solución: 4π.

25. Supongamos que el campo de velocidad de un fluido viene dado por $F = (1, x, z)$, medido en metros por segundo. Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

    Solución: $\frac{2\pi}{3}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$..