1. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

   (a) $\int_C (x+y)ds$, donde C es el contorno del triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

   (b) $\int_C (x^2+y^2)ds$, donde C es la curva $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

   (c) $\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$, donde C es la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

   Solución: (a) $1+\sqrt{2}$; (b) $2a^3\pi^2\left(1+2\pi^2\right)$; (c) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2 b^2\right)$.

2. Hallar las longitudes de los arcos de las curvas alabeadas siguientes:

   (a) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(3,3,2)$.

   (b) $x^2+y^2 = cz$, $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c}$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(x_0,y_0,z_0)$.

   (c) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, $z = e^{-t}$ $(0 < t < +\infty)$.

   Solución: (a) 5; (b) $\sqrt{cz_0}\left(\frac{2z_0}{3c}+1\right)$; (c) $\sqrt{3}$.

3. Calcular $\int_\gamma \omega$, siendo:

   (a) $\omega = \frac{1}{xy}\,dx + \frac{1}{x+y}\,dy$; $\gamma(t) = (2t,5t)$ $(1 \le t \le 4)$, orientado negativamente.

   (b) $\omega = e^x(\cos y\,dx + \operatorname{sen} y\,dy)$; γ el contorno del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, orientado positivamente.

   (c) $\omega = xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$; γ el camino cuya imagen es la elipse de ecuación $x^2+2y^2 = 4$, dotado de una orientación cualquiera.

   (d) $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$; γ el camino cuya imagen es la elipse de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right) = 0$, dotado de la orientación canónica.

   Solución: (a) $-\frac{3}{20} - \frac{10}{7}\ln 2$; (b) $2(e-1)(1-\cos 1)$; (c) 0; (d) $2\pi a^2 b$.

4. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $F(x,y) = (xy, x^2-y^2)$, y sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente, con punto inicial $(1,0)$. Hallar $\oint_\gamma F \cdot\, ds$.

   Solución: 0.

5. Calcular $\int_\gamma y\,dx - x\,dy$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, siendo γ_1 el primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y γ_2 el segmento que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$.

   Solución: $12 - 6\pi$.

6. Hallar todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$ tales que, con cualquier orientación, la integral curvilínea de la forma diferencial $\omega(x,y) = y^2\,dx + x^2\,dy$ sea nula.

   Solución: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ $(a \in \mathbb{R},\ r > 0)$.

7. Calcular $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$ a lo largo del arco de hélice de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos\lambda$, $y = 4\operatorname{sen}\lambda$, $z = 3\lambda$, para $0 \le \lambda \le 2\pi$.

   Solución: $18\pi^2$.

8. Evaluar $\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$ $(0 \le t \le 1,\ n \in \mathbb{N})$.

   Solución: $\frac{3}{4} - \frac{n-1}{n+1}$.

9. Calcular $\oint_\gamma (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, siendo γ el camino cuya imagen viene dada por
$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2-2pz & =0 \\ x+y-z+p & =0 \end{array}\right\}$$
con una orientación cualquiera.

   Solución: 0.

10. Averiguar si la forma diferencial $(e^x y^2 + 3x^2 y)\,dx + (2ye^x + x^3)\,dy$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

    Solución: $\Phi(x,y) = e^x y^2 + x^3 y + C$.

11. Averiguar si la forma diferencial $2xyz\,dx + (x^2 z + 2ye^z)\,dy + (x^2 y + y^2 e^z)\,dz$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

    Solución: $\Phi(x,y,z) = x^2 yz + y^2 e^z + C$.

12. Sean las funciones $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$, y las curvas $\gamma_1 : x = \cos\lambda,\ y = \operatorname{sen}\lambda \quad (0 \le \lambda \le \pi)$, $\gamma_2 : x = -\cos\mu,\ y = \operatorname{sen}\mu \quad (\pi \le \mu \le 2\pi)$. Se pide:

    (a) Comprobar que en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en el origen de coordenadas, se verifica $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

    (b) Decidir razonadamente si se verifica $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$.

    (c) Calcular ambas integrales por separado.

    Solución: (c) $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\pi$, $\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \pi$.

13. Sea $F = (xy, y, z)$. ¿Puede existir una función f tal que $F = \nabla f$?.

    Solución: No.

14. Sea $F(x,y,z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Probar que la integral de F a lo largo del perímetro del cuadrado con vértices en $(1,1,5)$, $(-1,1,5)$, $(-1,-1,5)$, $(1,-1,5)$, es nula.

15. Sea $F = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$. Evaluar $\int_\sigma F \cdot ds$, donde $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t})$ $(0 \le t \le 1)$.

    Solución: $e \operatorname{sen} 1 + \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}$.

16. Calcular la integral curvilínea $\int_\gamma (6xy + y)\,dx + (3x^2 + x)\,dy$, siendo:

    (a) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $(1 \le t \le 2)$, recorrido con la orientación canónica.

    (b) γ cualquier camino de clase C^1 a trozos, uniendo $A(1,1)$ con $B(1,8)$.

    (c) γ un camino cerrado cualquiera de clase C^1 a trozos.

    Solución: (a) 412; (b) 28; (c) 0.

17. Calcular la integral curvilínea $\int_\gamma yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, siendo:

    (a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ $(0 \le t \le 1)$, recorrido con la orientación canónica.

    (b) $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ \operatorname{tg} t)$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{4})$, con la orientación canónica.

    (c) γ cualquier camino de clase C^1 a trozos, uniendo $A(1,-1,2)$ con $B(-2,-1,1)$.

    (d) γ un camino cerrado cualquiera de clase C^1 a trozos.

    Solución: (a) 1; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 4; (d) 0.

18. Sea D un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, y sea $f(x,y)$ una función de clase C^2 en D. Probar que la condición de que f sea armónica en D (es decir, satisfaga $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$) es suficiente para que $\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}\, dy - \frac{\partial f}{\partial y}\, dx = 0$ cualquiera que sea la curva simple, cerrada y rectificable γ contenida en D.

19. Sean γ, γ^* dos curvas simples, cerradas del plano OXY, disjuntas entre sí, positivamente orientadas, y tales que γ^* está contenida en el recinto encerrado por γ. Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ dos funciones de clase C^1 en un abierto A que contenga a ambas curvas y a la región entre ellas, satisfaciendo $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Probar que entonces se verifica $\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \int_{\gamma^*} P\, dx + Q\, dy$.

20. Calcular
$$\oint_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy,$$
siendo γ la elipse de ecuación paramétrica $x = 4\cos\lambda,\ y = 3\,\mathrm{sen}\,\lambda$ $(0 \le \lambda \le 2\pi)$.

    Solución: -2π.

21. Usar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4\, dy$, donde C^+ es el perímetro de $[0,1]\times[0,1]$ en dirección antihoraria.

    Solución: 0.

22. Usar el teorema de Green para calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

    Solución: πab.

23. Usando el teorema de Green, hallar el área del recinto interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$.

    Solución: $\frac{3\pi}{2}$.

24. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^2$ $W(x,y) = (\frac{1}{1+y}, -\frac{1}{1+x})$, a lo largo del camino $\gamma(t) = (t, t^2)$ $(0 \le t \le 1)$, dotado de la orientación canónica.

    Solución: $\frac{\pi}{4} - 2 + 2\ln 2$.

25. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ $W(x,y,z) = (2y, x, z)$ a lo largo del camino $\gamma(t) = (t^{1/2}, t^{-1/2}, t)$ $(1 \le t \le 2)$, dotado de la orientación canónica.

    Solución: $\frac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$.

26. Se considera el campo de fuerzas $F(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Hallar el trabajo de F a lo largo de las curvas:

    (a) γ_1, dada por $y = x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (b) γ_2, dada por $y = x^2$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (c) γ_3, dada por $y = x^3$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (d) γ_4, dada por $y = x^3(x-1)\log(x+2) + x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    Solución: 1, en todos los casos.

27. Hallar el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $F(x,y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$ que recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario.

    Solución: $\frac{3\pi}{2}$.

28. Se consideran el campo vectorial $F = \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$ y la curva γ de ecuación $x = \lambda,\ y = \lambda^3 + \lambda^2 - 1,\ z = \lambda + 3$. Calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de γ desde el punto $(-1, -1, 2)$ al punto $(1, 1, 4)$.

    Solución: $56 - \pi$.

29. Sea $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial de clase C^1 en $M = \mathbb{R}^2\backslash\{(1, 0)\}$ y tal que $P\ dx + Q\ dy$ admite función potencial en todo dominio simplemente conexo contenido en M. Sabiendo que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = -13\ \mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$ es de 5 julios, mientras que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de la figura es de 18 julios, calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = 9\ \mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$.

    Solución: 14 julios.