1. Sean A y B conjuntos medibles acotados. Demostrar que:
   (a) $V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B)$;
   (b) $V(A \cup B) + V(A \cap B) = V(A) + V(B)$.
2. Demostrar que si A, B y C son medibles acotados, entonces:
$$V(A \cup B \cup C) = V(A) + V(B) + V(C) - V(A \cap B) - V(A \cap C) - V(B \cap C) + V(A \cap B \cap C).$$
3. Demostrar que todo conjunto numerable en $\mathbb{R}^2$ tiene area cero.
4. Demostrar que cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ tiene área cero.
5. Probar que $V_1(C) = 0$, donde C es el conjunto de Cantor.
6. Demostrar que $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$.
7. Se define la función f sobre $]0,1[$ poniendo $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]^{-1}$ si x es irracional, donde $[x]$ denota la parte entera de x. Demostrar que f es medible, con $\int_0^1 f(x)\,dx < \infty$.
8. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles acotadas, uniformemente convergente a f en $[0,1]$. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
   ¿Sigue valiendo el resultado si se reemplaza el intervalo $[0,1]$ por toda la recta real?.
9. Probar que si $\alpha > 1$, entonces
$$\int_0^1 \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + (nx)^\alpha}\,dx = o(n^{-1}) \quad \text{para } n \to \infty.$$
10. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} = 1.$$
11. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1 + x^2}\,dx = 0$$
    para $a > 0$, pero no para $a = 0$.
12. Dada f una función medible con $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx$$
13. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nsen\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}$$

14. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} x^p dx$$
si $p > -1$.

15. Demostrar que
$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)^2}.$$

16. Establecer la igualdad
$$\int_0^1 \operatorname{sen} x \log x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n)!}.$$

17. Probar que
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{e^t - x}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2+1} \quad (-1 \le x \le 1).$$

18. Demostrar que si $f, g \in L^1$, entonces $\left|f^2 + g^2\right|^{\frac{1}{2}} \in L^1$.

19. Probar que si $p > 0$ y $0 < a < \infty$, entonces:
    (a) $x^{-\frac{1}{p}} \in L^{p-\sigma}(0,a)$ para $0 < \sigma < p$, pero no si $\sigma = 0$;
    (b) $x^{-\frac{1}{p}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{p}} \in L^{p+\sigma}(0,a)$ para $\sigma = 0$, pero no si $\sigma > 0$.

20. Demostrar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces $\log x^{-1} \in L^p(0,a)$.

21. Probar que si $0 < a < \infty$ entonces $e^{\frac{1}{x}} \notin L^p(0,a)$ para ningún p, $0 < p \le \infty$.

22. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0,\pi)$:
$$\int_0^{\pi} (f(x) - \operatorname{sen} x)^2\, dx \le \frac{4}{9}, \quad \int_0^{\pi} (f(x) - \cos x)^2\, dx \le \frac{1}{9}.$$

23. Probar que $\int_0^{\pi} x^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sen} x\, dx \le \pi^{\frac{3}{4}}$.