1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$$\text{(a) } \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)\,dy\,dx \quad \text{(b) } \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}xye^{x+y}\,dy\,dx$$

$$\text{(c) } \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(-x\ln y)\,dy\,dx \qquad \text{(d) } \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\ln\left[(x+1)(y+1)\right]\,dx\,dy.$$

Solución: (a) $\frac{13}{15}$; (b) 1; (c) 0; (d) $4\ln 2-2$.

2. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones determinadas por los límites:

$$\text{(a) } \int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2}\,dy\,dx \qquad \text{(b) } \int_{0}^{1}\int_{1}^{e^x}(x+y)\,dy\,dx \quad \text{(c) } \int_{-3}^{2}\int_{0}^{y^2}(x^2+y)\,dx\,dy$$

$$\text{(d) } \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x}y\,\operatorname{sen}x\,dy\,dx \quad \text{(e) } \int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|}e^{x+y}\,dy\,dx \quad \text{(f) } \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2(1-x^2)^{1/2}}x\,dy\,dx.$$

Solución: (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{e^2-1}{4}$; (c) $\frac{7895}{84}$; (d) $\frac{1}{6}$; (e) $\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{3e^3}-\frac{5}{6}$; (f) $-\frac{2}{3}$.

3. Cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes:

$$\text{(a) } \int_{0}^{1}\int_{x^4}^{x^2}f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{(b) } \int_{0}^{1}\int_{-y}^{y}f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{(c) } \int_{1}^{4}\int_{x}^{2x}f(x,y)\,dy\,dx.$$

Solución: (a) $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}}f(x,y)\,dx\,dy$; (b) $\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}f(x,y)\,dy\,dx$;
(c) $\int_{1}^{2}\int_{1}^{y}f(x,y)\,dx\,dy+\int_{2}^{4}\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,dx\,dy+\int_{4}^{8}\int_{\frac{y}{2}}^{4}f(x,y)\,dx\,dy$.

4. Cambiar el orden de integración en las integrales del problema ii y evaluarlas.

Solución: (a) $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1}dx\,dy=\frac{1}{3}$; (b) $\int_{1}^{e}\int_{\ln y}^{1}(x+y)\,dx\,dy=\frac{e^2-1}{4}$;
(c) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}(x^2+y)\,dy\,dx+\int_{0}^{4}\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy\,dx+\int_{4}^{9}\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy\,dx=\frac{7895}{84}$;
(d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\arccos y}y\,\operatorname{sen}x\,dx\,dy=\frac{1}{6}$;
(e) $\int_{-2}^{0}\int_{-1}^{\frac{y}{2}}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{-2}^{0}\int_{-\frac{y}{2}}^{1}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{-1}^{-y}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}e^{x+y}\,dx\,dy=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{3e^3}-\frac{5}{6}$;
(f) $\int_{0}^{2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{0}x\,dx\,dy=-\frac{2}{3}$.

5. Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras:

$$\text{(a) } \int_{0}^{1}\int_{x}^{1}xy\,dy\,dx \qquad \text{(b) } \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\,\theta}\cos\,\theta\,dr\,d\theta$$

$$\text{(c) } \int_{0}^{4}\int_{y/2}^{2}e^{x^2}\,dx\,dy \quad \text{(d) } \int_{-3}^{1}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}x^2\,dx\,dy.$$

Solución: (a) $\frac{1}{8}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) e^4-1; (d) $\frac{43\sqrt{2}}{6}+\frac{81}{4}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}+\frac{81\pi}{8}$.

6. Evaluar las siguientes integrales en los recintos que se indican:

   (a) $\int_R (x^2+y^2)\,dV$, $R=[0,1]\times[0,1]$. (b) $\int_R \operatorname{sen}(x+y)\,dV$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

   (c) $\int_R (-xe^x \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2})\,dV$, $R=[0,2]\times[-1,0]$. (d) $\int_R |y|\cos\frac{\pi x}{4}\,dV$, $R=[0,2]\times[-1,0]$.

   Solución: (a) $\frac{2}{3}$; (b) $2\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}2$; (c) $\frac{2}{\pi}\left(1+e^2\right)$; (d) $\frac{2}{\pi}$.

7. Sea $I=[0,2]\times[0,3]$. Calcular $\int\int_I (x^2+4y)\,dx\,dy$.
   Solución: 44.

8. Sea D el recinto plano limitado por las rectas $y=0$, $y=1$, $x=-1$, $x=y$. Hallar
$$\int\int_D (xy-y^3)\,dx\,dy.$$
   Solución: $-\frac{23}{40}$.

9. Calcular $\int\int_D (x^2-y)\,dx\,dy$, siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y=x^2$, $y=-x^2$, y las rectas $x=1$, $x=-1$.
   Solución: $\frac{4}{5}$.

10. Hallar $\int\int_D xy\,dx\,dy$, siendo D la región del primer cuadrante encerrada por las parábolas $y^2=x$, $y=x^2$.
    Solución: $\frac{1}{12}$.

11. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes OX, OY y la recta $3x+4y=10$. Calcular $\int_D (x^2+y^2)\,dV$.
    Solución: $\frac{15625}{1296}$.

12. Sea D la región dada como el conjunto de los puntos (x,y) del plano donde $1\le x^2+y^2\le 2$ e $y\ge 0$. Evaluar $\int_D (1+xy)\,dV$.
    Solución: $\frac{\pi}{2}$.

13. Hallar $\int\int_D xy\,dx\,dy$, siendo D el conjunto de los puntos (x,y) del plano que satisfacen $0\le y\le x+2$, $4x^2+9y^2\le 36$.
    Solución: $\frac{23}{6}$.

14. Sea D el paralelogramo limitado por $y=-x$, $y=-x+1$, $y=2x$, $y=2x-3$. Calcular $\int\int_D (x+y)^2\,dx\,dy$.
    Solución: $\frac{1}{3}$.

15. Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=4$, $x^2-y^2=1$. Hallar $\int\int_D xy\,dx\,dy$.
    Solución: $\frac{15}{8}$.

16. Sea D la región $0\le y\le x$, $0\le x\le 1$. Evaluar $\int\int_D (x+y)\,dx\,dy$ haciendo el cambio $x=u+v$, $y=u-v$. Verificar la respuesta calculando directamente la integral mediante integrales iteradas.
    Solución: $\frac{1}{2}$.

17. Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4u, 2u+3v)$. Sea $D^* = [0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:
$$\text{(a) } \int\int_D xy\, dx\, dy, \quad \text{(b) } \int\int_D (x-y)\, dx\, dy,$$
haciendo un cambio para evaluarlas como integrales sobre D^*.

Solución: $D = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} + 3 \le y \le \frac{x}{2} + 6\right\}$; (a) 140; (b) -42.

18. Sea D el círculo unidad. Evaluar $\int\int_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

Solución: $\pi(e-1)$.

19. Mediante un cambio de variable a coordenadas polares, calcúlense las siguientes integrales:

(a) $\int\int_D (1+x^2+y^2)^{-3/2}\, dx\, dy$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

(b) $\int\int_D (x^3+y^3)\, dx\, dy$, siendo $D = \left\{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2-2x \ge 0\right\}$.

Solución: (a) $\frac{\pi}{12}$; (b) $\frac{1}{960}\left(203 + 453\sqrt{3} - 280\pi\right)$.

20. Calcular $\int\int_D (x^2+y^2)^{3/2}\, dx\, dy$, donde D es el disco $x^2+y^2 \le 4$.

Solución: $\frac{64\pi}{5}$.

21. Hallar $\int\int_D (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})\, dx\, dy$, donde D es el recinto acotado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

Solución: $\frac{\pi ab}{2}$.

22. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

Solución: πr^2.

23. Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b.

Solución: πab.

24. Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$, $y = 0$.

Solución: $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

25. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

Solución: 6.

26. Usar integrales dobles para calcular el volumen de una esfera de radio r.

Solución: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

27. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano OXY, el plano OYZ, el plano OXZ, los planos $x = 1$, $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

Solución: $\frac{2}{3}$.

28. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [1,2]$ y los lados verticales de R.

Solución: $\frac{11}{6}$.