Problemas de Análisis Complejo

Curso 2002-2003

FUNCIONES ARMÓNICAS

1. Sea u una función armónica en un dominio Ω. Probar que $f = u_x - iu_y$ es holomorfa en Ω.

2. Sea u una función armónica en un dominio Ω y sea $A = \{z \in \Omega : u_x(z) = u_y(z) = 0\}$. Demostrar que, salvo que u sea constante, A es un conjunto aislado.

3. Sea $u_1, u_2, \ldots, u_n$ una colección finita de funciones armónicas en un dominio Ω. Supongamos que $\sum_{k=1}^{n} u_k^2$ es armónica. Probar que u_i es constante para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

4. Sea u una función real de clase $C^2(\Omega)$. Se define la función $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\;\theta)$.

   (a) Probar que

   $$r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2},$$

   de modo que si el origen no está en Ω, entonces U es armónica en Ω si y sólo si,

   $$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0.$$

   (b) Supongamos que u sólo dependa de $|z|$ y no del argumento de z. esto es, $u(z) = \varphi(|z|)$. Demostrar que u es armónica si y sólo si, $u(z) = a\log|z| + b$, donde a y b son constantes.

5. Sea u una función armónica en un abierto Ω y supongamos que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Probar que

   $$u(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int_{D(a,R)} u(x,y)\,dxdy.$$

6. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad abierto y supongamos que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $\Re f$ e $\Im f$ son armónicas. Probar que

   $$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})P_r(\theta - t)\,dt,$$

   para todo $re^{i\theta}$ en $\mathbb{D}$. Demostrar que f es analítica en $\mathbb{D}$ si y sólo si

   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{int}\,dt = 0,$$

   para todo $n \geq 1$.

7. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad abierto y $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

   (a) Demostrar que si $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ es una función continua y $g_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ está definida por $g_r(z) = g(rz)$, entonces $g_r \to g$ uniformemente en $\mathbb{T}$ cuando $r \to 1^-$.

   (b) Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es una función continua y definimos $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ definida por $\tilde{f}(z) = f(z)$ para $z \in \mathbb{T}$ y
   $$\tilde{f}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)dt.$$
   (Por consiguiente $\Re\tilde{f}$ y $\Im\tilde{f}$ son armónicas en $\mathbb{D}$). Definamos $\tilde{f}_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}_r(z) = \tilde{f}(rz)$. Demostrar que para cada $r < 1$ existe una sucesión $\{p_n(z, \overline{z})\}$ de polinomios en z y $\overline{z}$ tal que $p_n(z, \overline{z}) \to \tilde{f}_r(z)$ uniformemente en $\mathbb{T}$.

   (c) *(Teorema de aproximación de Weierstrass para $\mathbb{T}$).* Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es una función continua entonces existe una sucesión $\{p_n(z, \overline{z})\}$ de polinomios en z y $\overline{z}$ tal que $p_n(z, \overline{z}) \to f(z)$ uniformemente en $\mathbb{T}$.

   (d) Supongamos que $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es una función continua con $g(0) = g(1)$. Usar el apartado anterior para probar que existe uns sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tal que $p_n(t) \to g(t)$ uniformemente para t en $[0, 1]$.

   (e) Si $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es una función continua, probar que existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tal que $p_n(t) \to g(t)$ uniformemente para t en $[0, 1]$.

8. Sea u una función armónica no constante en un dominio Ω. Probar que $u(\Omega)$ es abierto.

9. Demostrar que toda función entera que tome valores reales en algún intervalo del eje real es real en todo el eje real.

10. Sea G un abierto del plano y denotemos por H^+ el espacio de las funciones armónicas positivas en G.

    (a) Probar que (i) implica (ii).

      (i) Para todo compacto $K \subset G$ y para todo z_0 de G, existe una constante $k \geq 1$, (que sólo depende de K y del punto) tal que $u(z) \leq u(z_0)$ para todo $z \in K$, y para cualquier $u \in H^+$.

      (ii) Para toda sucesión $\{u_n\}$ creciente de H^+, la función $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ es idénticamente igual a $+\infty$, o bien siempre es finita y continua en G.

    (b) Supongamos que se verifica (ii). Probar que una función de H^+ no se puede anular en un punto, a menos que se anule idénticamente.

    (c) Supongamos que no se verifica (i). Probar que existen un compacto K en G, un punto w_0 en G, una sucesión $\{u_n\}$ en H^+, y una sucesión $\{z_n\}$ en K tal que se verifica $u_n(z_n) > n^3 u_n(w_0)$.