Problemas de Análisis Complejo

Curso 2002-2003

APLICACIONES CONFORMES

1. Sea Ω un dominio simplemente conexo propio de $\mathbb{C}$ y consideremos la familia $\mathcal{G} = \{f : \Omega \to \mathbb{D} : \ f \text{ es holomorfa e inyectiva en } \Omega\}$. Si $g \in \mathcal{G}$ no es sobreyectiva, y $z_0 \in \Omega$ es fijo, probar que existe una $f \in \mathcal{G}$ que satisface $|f'(z_0)| > |g'(z_0)|$.

2. Sea Ω un dominio simplemente conexo propio de $\mathbb{C}$ y supongamos que f y g son conformes de Ω sobre $\mathbb{D}$, que satisfacen $f(z_0) = h(z_0)$ y $f'(z_0) = h'(z_0)$ para algún $z_0 \in \Omega$. Probar que $f \equiv h$.

3. Sea Ω un dominio simplemente conexo propio de $\mathbb{C}$ y g la aplicación de Riemann de Ω sobre $\mathbb{D}$ con $g(z_0) = 0$. Si $f : \Omega \to \mathbb{D}$ es holomorfa y $f(z_0) = 0$, probar que $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$. ¿Qué ocurriría si se diese la igualdad?

4. Sea Ω un dominio simplemente conexo propio de $\mathbb{C}$ y supongamos que f y g son conformes de Ω sobre $\mathbb{D}$, que satisfacen $f(z_0) = g(z_0)$.

   (a) Encontrar una relación entre f y g.

   (b) Responder a igual cuestión si $f(z_0) = g(z_0) = a$.

5. Supongamos que f y g son holomorfas en $\mathbb{D}$, que f es inyectiva y $f(0) = g(0)$. Probar que
$$g(D(0,r)) \subset f(D(0,r)), \qquad 0 < r < 1.$$

6. Supongamos que f es analítica en un dominio convexo Ω y que $Re\, f'(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Probar que f es inyectiva en Ω.

7. Sea $f \in \mathcal{S}$. Demostrar que existe una $g \in \mathcal{S}$ tal que
$$g^2(z) = f(z^2), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

8. Supongamos que F es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, F es inyectiva y tiene un polo de orden uno en $z = 0$ con residuo 1, y que ni w_1 ni w_2 están en $F(\mathbb{D})$. Probar que $|w_1 - w_2| \leq 4$.

9. **Teorema de distorsión de Koebe.** Supongamos que f es un aplicación conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$ y sea $z \in \mathbb{D}$. Probar que

   (a)
$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z) - f(0)| \leq |f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

(b)

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

(c) Si $d_f(z) = dist(f(z), \partial f(\mathbb{D}))$, probar que

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq d_f(z) \leq (1-|z|^2)|f'(z)|.$$

10. Supongamos que f es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre un cuadrado con centro en el origen y $f(0) = 0$.

    (a) Demostrar que $f(iz) = if(z)$.

    (b) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pruébese que $a_n = 0$, a menos que $n-1$ sea múltiplo de 4.