Problemas de Análisis Complejo

Curso 2002-2003

ESPACIO DE FUNCIONES HOLOMORFAS

1. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión en $C(\Omega)$ que converge a f, y sea $\{z_n\}$ una sucesión en Ω que converge a $z \in \Omega$. Probar que $\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z)$.

2. **Teorema de Dini:** Sea $C(\Omega, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones reales continuas en un abierto Ω del plano, y sea $\{f_n\} \subset C(\Omega, \mathbb{R})$ una sucesión monótona creciente (es decir, $f_n(z) \leq f_{n+1}(z)$, para todo $z \in \Omega$ y para todo n). Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ para todo z de Ω y $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, entonces f_n converge a f en $C(\Omega, \mathbb{R})$.

3. Sea $\{f_n\} \subset C(\Omega)$ equicontinua. Si $f \in C(\Omega)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, probar que $f_n \to f$.

4. Sea $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$. Demostrar la siguiente caracterización de normalidad en $H(\Omega)$: $\mathcal{F}$ es normal en $H(\Omega)$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva c tal que $\{cf \,:\, f \in \mathcal{F}\} \subset \{f \in H(\Omega) \,:\, \rho(f, 0) < \varepsilon\}$.

5. Sea f una función holomorfa y no constante en el disco unidad abierto $\mathbb{D}$, y $\|f\|_\infty \leq 1$. Demostrar que $g(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (f(z))^n$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. ¿Es g necesariamente acotada?

6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en un dominio Ω que converge a f. Probar que f es inyectiva o constante.

7. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en $H(\Omega)$ y sea G un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $f(\Omega) \subset G$ para toda f de $\mathcal{F}$. Demostrar que si g es holomorfa en G, y acotada en los acotados, entonces la familia $\{g \circ f \,:\, f \in \mathcal{F}\}$ es normal.

8. Sea G un dominio acotado del plano complejo, $M > 0$ y $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones analíticas en G tales que $\displaystyle\int\int_G |f(z)|^2 dxdy \leq M$. Probar que $\mathcal{F}$ es normal en $H(G)$.

9. Supongamos que $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, donde Ω es un dominio del plano. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia acotada. Demostar que $\mathcal{F}' = \{f' \,:\, f \in \mathcal{F}\}$ es también una familia acotada de $H(\Omega)$.

10. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $H(\mathbb{D})$, $f_n(0) = 0$, para todo n. Supongamos que Ref_n converge a cero uniformemente sobre subconjuntos compactos. Demostrar que $f_n \to 0$ en $H(\mathbb{D})$.