# Problemas de Análisis Complejo

**Curso 2002-2003**

**PRINCIPIO DEL MÁXIMO Y LEMA DE SCHWARZ**

1. Si $f$ es una función analítica no constante en un abierto acotado $\Omega$ y continua en $\overline{\Omega}$, probar que $f$ tiene algún cero en $\Omega$ o $|f|$ alcanza su mínimo en $\partial\Omega$.

2. Sea $\Omega$ un dominio acotado y supongamos que $f$ es continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en $\Omega$. Demostrar que si existe una constante $c \geq 0$ tal que $|f(z)| = c$ para todo $z \in \partial\Omega$, entonces o $f$ es constante o $f$ tiene un cero en $\Omega$.

3. (a) Sea $f$ una función entera no constante. Demostrar que, para cualquier $c > 0$, la clausura de $\{z : |f(z)| < c\}$ es $\{z : |f(z)| \leq c\}$.
   (b) Sea $p$ un polinomio y $c > 0$. Probar que cada componente de $\{z : |p(z)| < c\}$ contiene un cero de $p$. (Usar el ejercicio anterior).

4. Sea $0 < r < R < \infty$ y consideremos el anillo $A = \{z : r \leq |z| \leq R\}$. Probar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier polinomio $p$ se tiene que

$$\sup\{|p(z) - z^{-1}| : z \in A\} \geq \varepsilon.$$

   Esto quiere decir que $z^{-1}$ no es límite uniforme de polinomios en $A$.

5. Sea $f$ analítica en (un entorno de) $\overline{D(0,R)}$ con $|f(z)| \leq M$ y $|f(0)| = a > 0$. Probar que el número de ceros de $f$ en $D(0, \frac{R}{3})$ es menor o igual a $\dfrac{1}{\log 2} \log\left(\dfrac{M}{a}\right)$.

6. Supongamos que $f$ y $g$ son analíticas en $\overline{D(0,R)}$ con $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $|z| = R$. Demostrar que si ni $f$ ni $g$ se anulan en $D(0,R)$ entonces existe una constante unimodular $\lambda$ tal que $f = \lambda g$.

7. Sea $f$ analítica en $D(0,R)$ y para $0 \leq r < R$ definimos $A(r) = \max\{Re\, f(z) : |z| = r\}$. Probar que, salvo que $f$ sea constante, $A(r)$ es una función estrictamente creciente de $r$.

8. Sea $\Omega = \{z : |Im\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ y supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica y $\limsup_{z\to w} |f(z)| \leq M$ para todo $w \in \partial\Omega$. También, supongamos que existen constantes $P > 0$ y $a < 1$ tales que

$$|f(z)| < \exp(P \exp(a|Re\, z|))$$

   para todo $z \in \Omega$. Demostrar que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$.

9. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica donde $\Omega$ es un dominio acotado. Fijemos un $z_0$ en $\partial\Omega$, y supongamos que $\limsup_{z \to w} |f(z)| \leq M$ para todo $w \in \partial\Omega$, $w \neq z_0$. Probar que si $\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\varepsilon} |f(z)| = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial\Omega$. (Ayuda: considerar la función $\phi(z) = (z - z_0)(z - a)^{-1}$, $a \notin \overline{\Omega}$.)

10. Supongamos $|f(z)| \leq 1$ para todo $|z| < 1$ y $f$ analítica. Considerando la función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por
$$g(z) = \frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)},$$
donde $a = f(0)$, probar que
$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$$
para todo $|z| < 1$.

11. ¿Existe alguna función analítica $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ y $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$?

12. Supongamos que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es analítica y satisface que $Re f(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
    (a) Demostrar que $Re f(z) > 0$.
    (b) Usando una adecuada transformación de Möbius, aplicar el Lema de Schwarz para probar que si $f(0) = 1$ entonces
    $$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$
    para todo $|z| < 1$.
    (c) Emplear la parte (a) para probar que $f$ también satisface
    $$|f(z)| \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}.$$

13. Probar la siguiente desigualdad de Caratheodory: Sea $f$ analítica en $\overline{D(0, R)}$ y pongamos $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ y $A(r) = \max\{Re\, f(z) : |z| = r\}$. Entonces, si $A(r) \geq 0$, probar que para $0 < r < R$,
$$M(r) \leq \frac{R + r}{R - r}(A(R) + |f(0)|).$$

14. Sea $f$ analítica en $\mathbb{D}$ y supongamos que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
    (a) Si $f(z_k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, probar que
    $$|f(z)| \leq M \prod_{k=1}^{n} \frac{|z - z_k|}{1 - \overline{z_k} z}$$
    para $|z| < 1$.

(b) Si $f(z_k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, cada $z_k \neq 0$, y $f(0) = Me^{i\theta}(z_1 z_2 \ldots z_n)$, encontrar una fórmula para $f$.

15. Supongamos que $f$ es holomorfa en un entorno del disco unidad cerrado y que $|f(z)| = 1$ para $|z| = 1$. Encontrar una expresión para $f$. (Ayuda: considerar, en primer lugar, el caso en que $f$ no tiene ceros en $\mathbb{D}$).

16. Sea $f$ holomorfa en un entorno del disco unidad cerrado y que $|f(z)| = 1$ para $|z| = 1$. Supongamos que $f$ tiene un cero simple en $z = \frac{1}{4}(1+i)$ y un cero doble en $z = 1/2$. ¿Puede ser $f(0) = \frac{1}{2}$?

17. ¿Existe alguna función analítica en $\mathbb{D}$ tal que $|f(z)| < 1$ para $z \in \mathbb{D}$, $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = \frac{3}{4}$? En caso afirmativo, encontrar tal función $f$.

18. Supongamos que $f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ y verifica que $|f(z)| \leq 1$ para todo $|z| < 1$. Demostrar que si $f(z)$ tiene un cero de orden $m$ en $z_0$, entonces $|z_0|^m \geq |f(0)$.

19. Supongamos que $f$ es una función analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, y que $1 < |f(z)| < M$ para todo $|z| = 1$, mientras que $f(0) = 1$. Demostrar que $f$ tiene un cero en $\mathbb{D}$ y que tal cero $z_0$ satisface $|z_0| > \frac{1}{M}$.

20. Sea $f$ una aplicación conforme en $\mathbb{D}$ sobre un dominio $G$. Probar que la distancia de $f(0)$ a la frontera de $G$ verifica la estimación

$$dist(f(0), \partial G) \leq |f'(0)|.$$