CAPÍTULO IV
DINÁMICA DE POBLACIONES

(1) Modelo de Lotka-Volterra: promedio de las especies alrededor del equilibrio.
(2) Matriz de la comunidad.
(3) Complejidad versus Estabilidad: sistemas presa-depredador más generales.
(4) Presa-depredador con crecimiento logístico de la presa.
(5) Presa-depredador con crecimiento logístico del depredador con respecto a la presa: modelo de Leslie.
(6) Presa-depredador con saturación en el término de depredación. Existencia de ciclos límite.
(7) Sistemas competitivos con matrices de comunidad simétricas.

Ejercicios del Capítulo IV

1. Se considera el sistema general de n presas $N_1, \dots, N_n$ y n depredadores $P_1, \dots, P_n$:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i[a_i - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}P_j]$$
$$\frac{dP_i}{dt} = P_i[\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}P_j - d_i],$$

a_i, b_{ij}, c_{ij}, d_i positivos.

a) Calcular el estado de equilibrio $(N^*, P^*) = (N_i^*, P_i^*)$. ¿Es evidente que los N_i^*, P_i^* son positivos?.
b) Calcular la matriz de la comunidad en (N^*, P^*). ¿Será en general asintóticamente estable?. ¿El que $n \to +\infty$ contribuye a la estabilidad del equilibrio?.

2. El sistema de tipo presa-depredador:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN(1 - \dfrac{N}{K}) - kNP \\ \dfrac{dP}{dt} = sP(1 - h\dfrac{P}{N}), \end{cases}$$

$r, K, k, s, h > 0$, se conoce como modelo de Leslie.

a) Deducir una versión adimensional.
b) Determinar y clasificar los puntos de equilibrio.
c) Trazar el campo de direcciones y la posible forma de las órbitas. ¿Pueden las órbitas cruzar los semiejes positivos?
d) Usando el criterio negativo de Bendixon o el de Dulac determinar condiciones sobre los parámetros que ayuden a descartar la existencia de oscilaciones.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

3. El sistema presa-depredador con saturación en el efecto de depredación tiene la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN(1-\dfrac{N}{K}) - k\dfrac{NP}{N+D} \\ \dfrac{dP}{dt} = sP(1-h\dfrac{P}{N}), \end{cases}$$

$r, K, k, D, s, h > 0$.

a) Formar una versión adimensional donde el número adimensional de presas sea $u = N/K$ y la nueva escala de tiempos sea $\tau = rt$.
b) Determinar el campo de direcciones y el posible comportamiento de las órbitas ¿Por qué no pueden llegar a extinguirse las presas?. Determinar y clasificar los estados de equilibrio.
c) Estudiar los posibles regímenes de los parámetros donde la coexistencia es asintóticamente estable.
d) Analizar, usando el teorema de Poincaré-Bendixon, la existencia de soluciones periódicas atractivas.

4. El que sigue es una variante atípica de los sistemas presa-depredador:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = aN - b\sqrt{N}P \\ \dfrac{dP}{dt} = -dP + c\sqrt{N}P, \end{cases}$$

con a, b, c, d positivos.

a) Formar una versión adimensional del sistema.
b) Determinar los equilibrios y clasificarlos.
c) ¿Pueden llegar a extinguirse las presas N en tiempo finito?.
d) Discutir la posible existencia de oscilaciones.

5. Se considera el sistema de competición entre n especies $N_1, \ldots, N_n$:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i[a_i - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} N_j] \qquad 1 \leq i \leq n,$$

a_i, α_{ij} positivos. Se supone que la matriz α_{ij} es simétrica, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, y definida positiva:

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} x_i x_j > 0 \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ x \neq 0.$$

a) Discutir con detalle el caso bidimensional $n = 2$.
b) Establecer la existencia de una única solución de equilibrio no trivial N^* .

c) Supondremos que N^* tiene todas sus componentes positivas. Se considera la función:

$$V(N) = \sum_{ij} \alpha_{ij}(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*).$$

Demuéstrese que V es una función de Lyapunov en todo el primer ortante R_+^n. Pruébese que N^* es un mínimo absoluto estricto de V en $\mathbb{R}_+^N$.

d) Establecer el comportamiento asintótico global de todas las especies en nuestro modelo.

6. Determinar qué clase de interacción entre dos especies de poblaciones N_1 y N_2 viene descrita por el modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1}{K_1 + b_{12}N_2}\right) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \dfrac{N_2}{K_2 + b_{21}N_1}\right). \end{cases}$$

Trácense las clinas nulas determinando los equilibrio y su estabilidad. Descríbanse las implicaciones biológicas del modelo.

7. Una interacción presa-depredador de tipo Herbíboro(H)-Plankton(P) es:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left[(K - P) - \dfrac{BH}{C + P}\right] \\ \dfrac{dH}{dt} = DH\left[\dfrac{P}{C + P} - AH\right], \end{cases}$$

r, K, A, B, C, D consatntes positivas. Explíquense las implicaciones ecológicas del modelo. Asimismo, adimensionalícese el sistema de suerte que pueda escribirse en la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = p\left[(k - p) - \dfrac{h}{1 + p}\right] \\ \dfrac{dh}{dt} = dh\left[\dfrac{p}{1 + p} - ah\right]. \end{cases}$$

Esbozar las clinas nulas valorando los cambios cualitativos cuando varía el parámetro k. Inténtese demostrar que para $a, k > 0$ cualesquiera siempre existe un equilibrio de coexistencia. En base al campo de direcciones conjetúrese la estabilidad de tal equilibrio.

8. Consideramos ahora una interacción entre dos especies de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = rN_1\left(1 - \dfrac{N_1}{K}\right) - aN_1N_2(1 - \exp[-bN_1]) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -dN_2 + eN_2(1 - \exp[-bN_1]), \end{cases}$$

a, b, d, e, r, K constantes positivas. ¿Qué tipo de interacción existe entre dichas especies, cuál es el significado biológico de los términos de la ecuación?

Adimensionalizar el sistema usando:

$$u = N_1/K, \quad v = aN_2/r, \quad \tau = rt, \quad \alpha = e/r, \quad \delta = d/r, \quad \beta = bK.$$

Determinar los equilibrios no negativos, discutir su posible carácter de estabilidad y valorar los correspondientes regímenes de los parámetros.