CAPÍTULO III
MECÁNICA

La materia del capítulo corresponde a las lecciones de la 1 a la 29 del libro de R. Haberman, "Mathematical Models". Los temas tratados son:

1) 2^a Ley de Newton. Sistemas de partículas. Análisis dimensional.
2) Sistema masa-resorte. Oscilaciones: amplitud, periodo, frecuencia. *Resonancia*(*).
3) El factor gravitatorio. Posiciones de equilibrio.
4) Fricciones aerodinámicas y de Coulomb.
5) Osciladores acoplados.
6) Péndulos lineal y no lineal.
7) *Péndulo no lineal y fricción* (*).

Ejercicios del Capítulo III

Mecánica. Sistemas masa resorte

1. Una masa m pende verticalmente de un resorte con rigidez k. Determinar su dinámica si se tiene en cuenta la fricción aerodinámica.

2. Dos masas m_1, m_2 deslizan sin rozamiento por un carril, estando unidas por un resorte cuya longitud en reposo es l y el coeficiente de rigidez k. Determínese el comportamiento de las masas.

3. Analizar el comportamiento de las masas del problema anterior si suponemos que éstas se mueven verticalmente e incluimos el efecto de la gravedad.

4. Se tienen dos resortes de constantes k_i y longitudes en reposo l_i, $i = 1, 2$. Una masa m se sujeta, sobre una supercie, a dos paredes paralelas separadas una distencia d usando cada uno de los resortes (el movimiento se supondrá perpendicular a aquellas).

a) ¿Por qué no es necesario que $d = l_1 + l_2$?.
b) Determinar la posición de equilibrio de la masa, estudiando su movimiento con respecto a la misma.
c) Determinar el periodo de oscilación. ¿Cómo debería depender de d?

6. Supóngase que los dos resortes de los problemas anteriores se conectan en paralelo a una masa m (ambos se conectan a la masa y a la pared).

a) ¿Cuál debería ser la posición de equilibrio?
b) Demuéstrese que el movimiento del sistema es oscilatorio con respecto al equilibrio.
c) ¿Cuál es el periodo de oscilación?

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

d) Supongamos que los dos resortes se remplazan por uno sólo. Determinar su longitud en reposo l y rigidez k.

5. Supongamos que los resortes del problema anterior se empalman en serie. ¿Cuál es el movimiento de una masa sujeta con este dispositivo a la pared si admitimos que no hay rozamiento contra el suelo?.
Indicación. Razonar con el balance de fuerzas en el punto (sin masa) de conexión entre los resortes.

6. Dos masas iguales m se mueven sujetas entre sí y cada una de ellas a sendas paredes paralelas separadas un distancia d. Se supone dicho moviento transversal a la pared y sin los efectos de ningún tipo de fricción, mientras los resortes tienen la misma rigidez k y longitud en reposo l. Estudiar las ecuaciones del movimiento.

7. Se considera el sistema masa resorte:

$$m\ddot{x} = -kx + F_f(\dot{x}),$$

donde F_f es la fuerza de fricción de tipo Colulomb:

$$F_f(\dot{x}) = \begin{cases} \gamma & \dot{x} < 0 \\ \varphi & \dot{x} = 0 \\ -\gamma & \dot{x} > 0, \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ es un coeficiente que depende de la rugosidad de la superficie y del peso del cuerpo (es decir, de la masa m), y el valor φ recorre el intervalo $-\gamma \leq \varphi \leq \gamma$, es decir, F_f es multívoca en $\dot{x} = 0$. Discútase la ecuación del movimiento. Si en $x = x_0$ se comunica a la masa una velocidad $v_0 > 0$, ¿cuánto tiempo tarda en pararse?

Péndulos. Dinámica de campos de fuerzas centrales

1. Sean (ρ, θ) las coordenadas polares en las que θ es el ángulo positivo a partir del semieje $y < 0$:

$$\bar{x} = (x, y) = \rho(\ \text{sen}\ \theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}) = \rho\bar{r}.$$

Se considera una prtícula de masa m sometida a un campo de fuerzas plano $\overline{F}$.

(1) Escríbase la ecuación del movimiento $m\ddot{\bar{x}} = \overline{F}$ en coordenadas polares para llegar a:

$$m\{(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2)\bar{r} + (\rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta})\bar{\theta}\} = F_r\bar{r} + F_\theta\bar{\theta}, \tag{1}$$

donde $\bar{r}, \bar{\theta}$ son los unitarios radial y angular:

$$\bar{r} = \ \text{sen}\ \theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}, \qquad \bar{\theta} = \cos\theta\bar{i} - \ \text{sen}\ \theta\bar{j},$$

mientras F_r, F_θ son las componentes radial y angular de la fuerza. Dedúzcanse las ecuaciones diferenciales para ρ y θ.

(2) En el caso del péndulo simple obténgase la ecuación del movimiento bajo la hipótesis de que la tensión $\overline{T}$ tiene la forma:

$$\overline{T} = -T\bar{r},$$

siendo esta fuerza capaz de mantener la longitud del hilo en $\rho = L$. Hallar la tensión y describir el significado de sus términos.

(3) Estudiar el moviento de la partícula en (1) si ρ es constante y la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ es constante.

(4) Determinar las trayectorias en (1) si θ es constante.

2. Hallar las ecuaciones del movimiento del péndulo con un hilo elástico de longitud en reposo L y coeficiente de rigidez k. Es decir, la fuerza de tensión tiene la forma:

$$\overline{T} = -k(L - \rho)\bar{r}.$$

3. Consideremos un péndulo cuya longitud de hilo $L(t)$ (que se supone inextensible) es recogida con velocidad constante $\dot{L} = c$. Determinar la ecuación diferencial para θ.

4. Un campo de fuerzas centrales (plano) $\overline{F}$ es el que tiene la forma: $\overline{F} = -g(\rho)\bar{r}$.

(1) Hallar las ecuaciones para ρ y θ.

(2) Probar que $\rho^2\dot{\theta}$ permanece constante.

(3) Demostrar que $J = \rho^2\dot{\theta}/2$ es la veolcidad de variación del área (velocidad aerolar) desarrollada por $\bar{r}$.

(4) Estudiar la posibilidad de órbitas circulares.

(5) Aplicar al caso particular del campo graviatorio donde:

$$\overline{F} = -\frac{GMm}{\rho^2}\bar{r},$$

con M la masa que crea el campo, ρ la distancia a la misma.

5. Sea $\bar{x}$ la posición de una partícula de masa m y velocidad $\bar{v}$. Su momento angular $\overline{L}_\omega$ se define como:

$$\overline{L}_\omega = \bar{x} \times m\bar{v}.$$

Si la resultante de las fuerzas aplicadas está dirigida en todo momento hacia un punto fijo P, pruébese que el momento angular se conserva:

$$\frac{d}{dt}(\overline{L}_\omega) = 0.$$

6. Newton conocía un valor experimental para la aceleración de la gravedad g, el radio de la tierra r_0 y la distancia de la luna al centro de la tierra. Con esta información y el

supuesto de que la órbita de la luna es circular estímese el tiempo que tarda ésta en orbitar alrededor de la tierra (recuérdese que $g = GM/r_0^2$). En el siglo XVII, Newton se ayudó de estas ideas para verificar la ley del inverso de los cuadrados.

7. En el problema de los dos cuerpos dos masas aisladas m_1, m_2 evolucionan en el plano bajo el efecto de la gravedad. Si sus posiciones son $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, demuéstrese $\bar{z} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ satisface la ecuación:

$$\ddot{\bar{z}} = -\mu \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^3},$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$.

8. Escribir la ecuación del problema anterior probando que las soluciones en coordenadas polares, $\rho = \rho(\theta)$, cumplen una ecuación lineal de segundo orden en la función $u = 1/\rho$. Más precisamente:

$$u(\theta) = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \omega) \qquad p, e > 0.$$

Para completar el análisis, demuéstrese que:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{1}{1 + e\cos(\theta - \omega)},$$

es la ecuación una cónica en coordenadas polares: $e = 0$ circunferencia, $0 < e < 1$ elipse, $e = 1$ parábola, $e > 1$ hipérbola.