CAPÍTULO II
SISTEMAS PLANOS

Ecuación orbital

En el capítulo I se introdujeron las nociones de órbita γ y semióbitas $\gamma_\pm$ de una ecuación N dimensional:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad u \in \mathbb{R}^N,$$

con base en un punto u_0 de $\mathbb{R}^N$. Es natural preguntarse si el tiempo inicial t_0 tiene influencia sobre la órbita o las semiórbitas. La respuesta es negativa.

Teorema 1. *Si la ecuación (1) es C^1, es decir, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es de clase C^1, entonces por $u_0 \in \mathbb{R}^N$ pasa una única órbita $\gamma(u_0)$ (respectivamente, semiórbitas $\gamma_\pm(u_0)$).*

Definición. *Se dice que una órbita γ es* abierta *si $u(t_1) \neq u(t_2)$ para $t_1 < t_2$, donde $u(t)$ es cualquier solución de (1) que genere γ. Se dice que es cerrada si corresponde a una solución periódica u de periodo minimal $T > 0$, por lo tanto no constante.*

Para una ecuación C^1 las órbitas las órbitas se clasifican de la siguiente forma.

Teorema 2. *Sea γ una órbita arbitraria de la ecuación autónoma N dimensional (1). Entonces,*

i) *o bien $\gamma = \{u_0\}$, es decir $u(t) = u_0$ es una solución estacionaria,*
ii) *o bien γ es abierta,*
iii) *o bien γ es cerrada.*

La prueba emplea algunos resultados elementales.

Lema 1. *Si $u(t)$ es solución de (1) y*

$$u(t_1) = u(t_2) \qquad t_1 < t_2.$$

Entonces $u(t+T) = u(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ donde $T = t_2 - t_1$.

Observación. Debe demostrarse también que el dominio $I = (\alpha, \beta)$ de la solución u es $\mathbb{R}$. Nótese que si $v(t) = u(t+T)$ su dominio es $J = (\alpha - T, \beta - T)$. Se tiene $u(0) = v(0)$, luego $u = v$ y además $I = J$. Como $T > 0$, $I = \mathbb{R}$.

Lema 2. *Sea $u \in C(\mathbb{R})$ periódica y no constante. Entonces u admite un periodo mínimal positivo $T > 0$. Más aún, el conjunto de los periodos de u tiene la forma $\{nT : n \in \mathbb{Z}\}$.*

Observación. En el curso de la demostración es bueno proceder probando que el conjunto de los periodos es un grupo. Después que es cerrado. El que u sea no constante implica entonces que el conjunto de periodos positivos tiene un mínimo positivo. Se concluye finalmente que el conjunto de los periodos es un grupo cíclico.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Observaciones.

a) Si γ es abierta, es la imagen inyectiva de un intervalo abierto, equivalentemente de $\mathbb{R}$, por una aplicación C^1. Como $u' = f(u) \neq 0$ sobre γ, u es localmente invertible. Por tanto γ es homeomorfa a $\mathbb{R}$.

b) Si γ es cerrada, γ es homemorfa a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Es decir es una curva de Jordan de clase C^1. Recíprocamente, si una órbita γ es una curva de Jordan, γ es una órbita cerrada y la parametriza una solución periódica no constante, de periodo mínimal $T > 0$.

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una órbita plana de la ecuación

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, u_2) \\ u_2' = f_2(u_1, u_2) \end{cases} \qquad f = (f_1, f_2), \tag{2}$$

que no es un punto. Sea $P = (a_0, b_0)$ un punto de γ. Como $f(P) \neq (0,0)$, si $f_1(P) \neq 0$ entonces $t = t(u_1)$. Por tanto $u_2 = u_2(t(u_1))$ y γ se describe localmente por la función $u_2 = u_2(u_1)$ que resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{du_2}{du_1} = \dfrac{f_1(u_1, u_2)}{f_2(u_1, u_2)} \\ u_2(a_0) = b_0. \end{cases} \tag{3}$$

Un enunciado preciso es el siguiente.

Teorema 3. *Sea γ la órbita de la ecuación plana (2), de clase C^1, que pasa por el punto $P = (a_0, b_0)$. Supongamos que $f_1(P) \neq 0$ y sea $u_2(u_1)$, $\alpha_0 < u_1 < \beta_0$ la solución maximal de (3). Entonces $\{(u_1, u_2(u_1)) : \alpha_0 < u_1 < \beta_0\}$ coincide con parte de la órbita que pasa por P. Más precisamente, con la componente conexa de γ que pasa por P y está contenida en la región $\Omega_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : f_1(u) \neq 0\}$.*

Recíprocamente, sea $u_2(u_1)$ es la solución maximal de (3) mientras $u_1 = u_1(t)$, $\alpha_1 < t < \beta_1$ define la solución maximal de:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, u_2(u_1)) \\ u_1(0) = a_0. \end{cases}$$

Entonces $u_1(t)$, $u_2(t) := u_2(u_1(t))$ define una solución local del problema:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, u_2) & u_1(0) = a_0 \\ u_2' = f_2(u_1, u_2) & u_2(0) = b_0. \end{cases}$$

Ejemplo 1. Consideremos $b_0 < 0$. Siguiendo el espíritu del teorema 3 determínese, en los siguientes ejemplos, la parte de la órbita por $(0, b_0)$ que se describe en el resultado.

$$a) \quad \begin{cases} u_1' = -u_2 \\ u_2 = u_1, \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} u_1' = 1 \\ u_2' = 1 + u_2^2. \end{cases}$$

Ejemplo 2. Nodos y puntos de silla lineales. Consideremos la ecuación:

$$u_1' = \lambda_1 u_1$$
$$u_2' = \lambda_2 u_2,$$

donde $0 < \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Excepto $(0,0)$ y los semiejes $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ que son órbitas, las restantes se escriben en la forma:

$$u_2 = b\left(\frac{u_1}{a}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

en donde u_1 y a tienen el mismo signo. En el caso $\lambda_1\lambda_2 > 0$ se dice que $(0,0)$ es un nodo, en caso contrario, $\lambda_1\lambda_2 < 0$, se le denomina punto de silla.
Ejemplo 3. El sistema de Lotka-Volterra adimensionalizado tiene la forma:

$$\begin{cases} u' = u(1-v) \\ v' = \alpha v(u-1), \end{cases}$$

$\alpha > 0$. La ecuación orbital es:

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v}{1-v}\frac{u-1}{u},$$

y si $b \neq 1$ la órbita por (a,b) localmente tiene la forma:

$$\alpha(u - \log u) + v - \log v = C,$$

donde si $H(u,v)$ designa la expresión del primer miembro, $C = H(a,b)$. La función H es estrictamente convexa, tiene un mínimo global (respecto de $u > 0$, $v > 0$) en $(1,1)$ mientras $H(u,v) \to +\infty$ cuando $u+v \to +\infty$ en $\mathbb{R}^2_+$ o bien si $u \to 0$ o $v \to 0$. Del estudio de H sobre rectas por $(1,1)$ se sigue que $H(u,v) = C$ define para $C > H(1,1)$ una curva de Jordan C^1 y por tanto todas las órbitas del sistema, excepto el punto de equilibrio, son cerradas. De hecho, tales curvas limitan regiones convexas
Observación. Nótese que la funcion $H(u,v)$ se conserva sobre las soluciones del sistema de Lotka-Volterra.
Observación. En dimensión N la ecuación orbital cerca de un punto P toma la forma:

$$\frac{du_i}{du_1} = \frac{f_i(u)}{f_1(u)} \qquad 2 \leq i \leq N,$$

supuesto que $f_1(P) \neq 0$. Una manera alternativa de escribir la ecuación orbital es:

$$\frac{du_1}{f_1(u)} = \cdots = \frac{du_N}{f_N(u)}.$$

Coordenadas polares

La ecuación:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, u_2) \\ u_2' = f_2(u_1, u_2), \end{cases} \tag{C}$$

se puede expresar, haciendo el cambio de coordenadas:

$$u_1 = \rho \cos\theta$$
$$u_2 = \rho \text{ sen } \theta,$$

en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = R(\rho, \theta) \\ \theta' = \Theta(\rho, \theta). \end{cases} \tag{P}$$

Para construcción de ejemplos y uso general conviene establecer claramente la relación entre ambas ecuaciones. En efecto, dada (C) se tiene (P) en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = f_1 \cos\theta + f_2 \text{ sen } \theta \\ \theta' = \rho^{-1}(-f_1 \text{ sen } \theta + f_2 \cos\theta), \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen } \theta \\ -\text{ sen } \theta/\rho & \cos\theta/\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, dada (P) las ecuaciones cartesianas se recuperan en la forma:

$$\begin{cases} u_1' = \rho^{-1} R u_1 - \Theta u_2 \\ \theta' = \rho^{-1} R u_2 + \Theta u_1, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1/\rho & -u_2 \\ u_2/\rho & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

El lenguaje de las coordenadas polares es muy conveniente cuando se trata con órbitas cerradas o fenómenos de vorticidad en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 1. Focos y centros lineales. Consideremos:

$$u_1' = \mu u_1 - \nu u_2$$
$$u_2' = \nu u_1 + \mu u_2,$$

$\mu, \nu > 0$. En coordenadas polares la ecuación es:

$$\rho' = \mu\rho$$
$$\theta' = \nu b.$$

En el caso $a \neq 0$ todas las órbitas son espirales que se aproximan a cero (en el sentido de t creciente) cuando $t \to +\infty$ si $a > 0$, rotando con velocidad angular θ. Se dice en este caso que $(0,0)$ es un foco estable. Si $a = 0$ todas las órbitas son cerradas y rodean al origen. Se dice ahora que $(0,0)$ es un centro lineal.

Ejemplo 2. Se recoge a continuación la versión cartesiana de la ecuación $\rho' = \rho(1-\rho)$, $\theta' = -1$:

$$\begin{cases} u_1' = u_1(1-\rho) + u_2 \\ u_2' = u_2(1-\rho) - u_1. \end{cases}$$

Observación. Si $\Theta(\rho_0, \theta_0) \neq 0$ cerca de $P = (\rho_0, \theta_0)$ la órbita se puede representar por la solución de:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{R(\rho,\theta)}{\Theta(\rho,\theta)} \qquad \rho(\theta_0) = \rho_0.$$

En el caso del Ejemplo 1 la órbita sería $\rho = \rho_0 e^{\frac{\mu}{\nu}(\theta - \theta_0)}$.

El plano de fases: ecuaciones lineales

Consideremos la ecuación lineal

$$u' = Au \qquad u \in \mathbb{R}^2\,, \tag{L}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Supondremos que $\det(A) \neq 0$, es decir que la ecuación es no degenerada y tiene un único equlibrio $(u_1, u_2) = (0,0)$. Designaremos por λ_1 y λ_2 los autovalores de A, por V_1 y V_2 los correspondientes autoespacios. Recuérdese que dichos autovalores son las raíces de:

$$\lambda^2 - (\text{traza A})\lambda - \det \text{ A} = 0,$$

con traza $A = a_{11} + a_{22}$.

A continuación se da una descripción detallada de las órbitas de la ecuación. Por ejemplo, en el resultado que sigue, las órbitas cerradas son elipses. Sin embargo la información se expresa en la terminología del caso no lineal.

Teorema 4. *Supongamos que λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, es decir $\lambda_1 = \mu + \nu i$, $\lambda_2 = \mu - \nu i$, $\nu > 0$. Si $\mu > 0$ (< 0) entonces todas las órbitas de (L) tienden a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$ ($+\infty$) y a $+\infty$ en módulo cuando $t \to +\infty$ ($-\infty$), rotando infinitas veces aldedor del origen $(0,0)$. Si $\mu > 0$ se dice que $(0,0)$ es un foco inestable, estable si $\mu < 0$. Si $\mu = 0$, todas las órbitas son cerradas y rotan infinitas veces alrededor de $(0,0)$ con período $2\pi/\nu$ (en este caso se dice que $(0,0)$ es un centro lineal).*

Teorema 5. *Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se tienen los siguientes casos:*

a) *$\lambda_1\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Entonces las únicas órbitas acotadas cuando $t \to +\infty$, que además tienden a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$ son $(0,0)$ y las dos semirectas de V_1. Análogamente las únicas órbitas acotadas cuando $t \to -\infty$, que tienden a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$ son $(0,0)$ y las dos semirectas de V_2 (se dice que $(0,0)$ es un punto de silla).*

b) *$\lambda_1\lambda_2 > 0$. Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ todas las orbitas convergen a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$. Exceptuando las órbitas en V_2 todas las restantes órbitas se acercan a $(0,0)$ de forma tangente a V_1. En este caso se dice que $(0,0)$ es un nodo estable. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$ ($(0,0)$ se llamaría entonces nodo inestable).*

Teorema 6. *Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo.*

a) *Si el índice de λ_1 es uno entonces todas las órbitas son semirectas que convergen a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$ (nótese que $\dim V_1 = 2$).*

b) *Si el índice de λ_1 es dos entonces todas las órbitas de (L) convergen a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a V_1 (nótese que ahora $\dim V_1 = 1$).*

En ambos casos se dice que $(0,0)$ *es un nodo estable impropio. Si* λ_1 *es positivo, la situación es la misma una vez se ha cambiado* t *por* $-t$.

La demostración de estos resultados es elemental. Las líneas principales se esbozan a continuación. Existe un cambio de coordenadas lineal $u = Px$, $P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertible, de forma que:

$$J = P^{-1}AP,$$

es la forma canónica de $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. P tiene por columnas las coordenadas en la base canónica de los vectores de la nueva base. En caso de autovalores reales y distintos λ_1, λ_2,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

siendo las columnas de P las coordenadas de los autovectores asociados v_1, v_2 en la base canónica.

Si los autovalores son $\lambda = \mu \pm \nu i$, $\nu \neq 0$, $A(\xi + \eta i) = (\mu + \nu i)(\xi + \eta i)$, en la base $\{\xi, \eta\}$, la forma canónica es:

$$J = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}.$$

Si λ_1 es autovalor doble de índice 2, se toma $v_1 \in \mathbb{R}^2$, $(A - \lambda_1 I)v_1 \neq 0$, y la base $\{v_1, v_2\}$ con $v_2 = (A - \lambda_1 I)v_1$. La correspondiente forma canónica es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

En caso de autovalor doble λ_1 e índice 1,

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Tras el cambio de variable $u = Px$, la ecuación lineal (L) pasa a ser:

$$x' = Jx. \tag{J}$$

Por normalizar escribiremos u en lugar de x. Los tipos de órbitas corresponden, módulo la transformación P, a los de la ecuación normalizada (J).

En el caso de autovalores reales distintos, o autovalor doble de índice cero (J) adopta la forma:

$$\begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2. \end{cases}$$

La órbita por (a, b) es:

$$u_2 = b\left(\frac{u_1}{a}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Para autovalor real doble de índice 1:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

La órbita por (a, b) resulta ser:

$$u_2 = \left(\frac{u_1}{a}\right)[b + \frac{a}{\lambda_1} \log\left(\frac{u_1}{a}\right)].$$

Finalmente, en el caso de autovalores complejos $\lambda = \mu \pm \nu i$:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Si (a, b) tiene coordenadas polares (ρ_0, θ_0), la ecuación polar de la órbita es:

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\mu}{\nu}(\theta - \theta_0)}.$$

Con estos elementos se construye fácilmente la prueba de los resultados anteriores.

Comportamiento en las proximidades de equilibrios no degenerados

Consideraremos la ecuación C^1 en el plano,

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, u_2) \\ u_2' = f_2(u_1, u_2) \end{cases} \qquad (S)$$

cuyas órbitas estudiaremos en las proximidades de un punto crítico (de equilibrio) $u_0 = (a, b)$. Recuérdese a tales efectos el comportamiento de los sistemas lineales planos con respecto al punto crítico (aislado) $(a, b) = (0, 0)$.

Definición. Se dice que un punto crítico (a, b) de la ecuación (S) es no degenerado si $f'((a, b))$, la matriz jacobiana de $f = (f_1, f_2)$ en (a, b), es invertible (es decir tiene determinante no nulo).

Propiedad. *Un punto crítico (a, b) no degenerado para la ecuación (S) es un punto crítico aislado para dicha ecuación. Es decir, existe un entorno U de (a, b) donde no hay otros puntos críticos de la misma.*

Como se dijo en el capítulo anterior, el estudio de una ecuación C^1

$$u' = f(u) \qquad (1)$$

cerca de un punto crítico $u_0 \in \mathbb{R}^n$, sugiere hacer el cambio $x = u - u_0$, tras el que la ecuación se transforma en (teorema de Taylor)

$$x' = Ax + o(|x|), \qquad (2)$$

donde $A = f'(u_0)$ y donde $o(|x|)$ es una función C^1 que tiene la propiedad:

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{o(|x|)}{|x|} = 0\,.$$

Estudiar las órbitas de (1) cerca de u_0 equivale a estudiar las órbitas de (2) cerca de $x = 0$ (¡que es un punto crítico de la ecuación (2)!). Por otra parte, el estudio de (2) cerca de $x = 0$ se corresponde con el de la ecuación

$$z' = Jz + o(|z|), \tag{3}$$

obtenida de (2) tras el cambio lineal $x = Pz$, P una matriz $n \times n$ invertible; en la que $J = P^{-1}AP$. Esto permite simplificar la matriz original A al objeto de tener el mayor número de ceros posible (por ejemplo si J es la forma canónica de Jordan de A).

Recapitulamos las definiciones de estabilidad (capítulo anterior), introducidas por M. Lyapunov a principios de siglo .

Definición. Un punto crítico de (1), u_0 se dice estable si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ (que depende de ε) y en tal que si $\hat{u}_0$ cumple $|\hat{u}_0 - u_0| < \delta$ entonces $|\varphi(t, \hat{u}_0) - u_0| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Un punto crítico de (1), u_0 se dice asintóticamente estable si a) es estable, b) existe $\eta > 0$ tal que si $|\hat{u}_0 - u_0| < \eta$ entonces:

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t, \hat{u}_0) = u_0\,.$$

Ejemplos

a) El punto crítico $(0, 0)$ es estable para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x\,, \end{cases}$$

pero no es asintóticamente estable.

b) $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - cy\,, \end{cases}$$

donde $c > 0$.

El siguiente resultado es un caso particular de uno de los teoremas más célebres de Lyapunov.

Teorema 7. *Sea $u_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto crítico de la ecuación (1).*

i) *Si la matriz $A = f'(u_0)$ tiene sus autovalores con la parte real negativa, entonces u_0 es asintóticamente estable.*

ii) *Si $A = f'(u_0)$ tiene algún autovalor con la parte real positiva entonces u_0 es inestable.*

Observaciones. a) Como muestra el caso escalar, cuando algún autovalor tiene la parte real cero la situación es dudosa.
b) En el caso de una ecuación lineal:

$$u' = Au,$$

la demostración del teorema es sencilla. En efecto, podemos suponer que al matriz $A \in M_{N\times N}$ está en forma canónica de Jordan:

$$A = \text{diag}\,(D_1, \ldots, D_p) \qquad D_i \in M_{\alpha_i\times\alpha_i}.$$

Suponemos que A tiene p autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicidades algebraicas α_i e índices n_i. Esto significa que:

$$D_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i \qquad I_{\alpha_i}, N_i \in M_{\alpha_i\times\alpha_i},$$

I_{α_i} la matriz identidad de dimesión $\alpha_i \times \alpha_i$, D_i nilpotente de índice n_i, es decir:

$$D_i^k \neq 0 \qquad k \leq n_i - 1 \qquad D_i^{n_i} = 0.$$

Por tanto,

$$e^{tA} = \text{diag}\,(e^{tD_1}, \ldots, e^{tD_p}).$$

Nótese que:

$$e^{tD_j} = e^{\Re\lambda_j t} e^{i\Im\lambda_j t}\left(I_{\alpha_j} + tN_j + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}N_i^{n_i-1}\right).$$

De esta expresión se sigue fácilmente la demostración del teorema 7 en el caso lineal.

Los teoremas siguientes están especializados en el caso del plano. Complementan la estabilidad con la geometría de las órbitas cerca de los puntos críticos no degenerados.

Teorema 8. *Sea $u_0 = (a, b)$ un punto crítico no degenerado de la ecuación $u' = f(u)$ tal que la matriz $f'(u_0)$ admite dos autovalores λ_1 y λ_2 complejos conjugados, es decir $\lambda_1 = \mu + \nu i$, $\lambda_2 = \mu - \nu i$ $(\nu \neq 0)$. Si $\mu < 0$ (> 0) entonces existe un entorno de u_0 donde todas las semiórbitas positivas (negativas) tienden a u_0 cuando $t \to +\infty$ $(-\infty)$ rotando infinitas veces aldedor del mismo. Si $\mu > 0$ se dice que u_0 es un foco (no lineal) inestable, o (no lineal) estable si $\mu < 0$.*

Advertencia. Si $\mu = 0$ no se puede predecir en principio el comportamiento de las órbitas próximas a u_0. La situación genérica es que, salvo un número finito, se pierden las órbitas cerradas de período $2\pi/\nu$ del caso lineal. En el ejemplo,

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

no subsiste ninguna de las soluciones periódicas del problema lineal asociado

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = -1\,. \end{cases}$$

Por otra parte, el punto $(1, 1)$ del sistema de Lotka-Volterra es centro lineal y también no lineal. Sin embargo, esta situación es excepcional.

En los siguientes resultados es necesario suponer que f es de clase C^2.

Teorema 9. *Supongamos que los autovalores λ_1, λ_2 de $f'(u_0)$ son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces,*

a) (Puntos de silla) *Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) existe un entorno U de u_0 , dos semiórbitas positivas γ_1, γ_2, y dos semiórbitas negativas Γ_1, Γ_2 contenidas en U, con las propiedades siguientes. Todas las semiórbitas positivas γ^+ que estén contenidas en U satisfacen $\gamma^+ \subset \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{u_0\}$, convergen a u_0 cuando $t \to +\infty$ y se aproximan a u_0 de forma tangente a la recta $u_0 + V_1$ (V_1 el autoespacio asociado al autovalor λ_1). Análogamente, toda semiórbita negativa γ^- en U debe estar contenida en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{u_0\}$ y deberá aproximarse a u_0 cuando $t \to -\infty$ de forma tangente a la recta $u_0 + V_2$ (V_2 el autoespacio asociado a λ_2). Además, g_1 y g_2, así como Γ_1 y Γ_2 se aproximan a u_0 siguiendo sentidos opuestos.*

b) (Nodos) *$\lambda_1\lambda_2 > 0$. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ existe un entorno U de u_0 en el que todas las semiórbitas positivas (omitimos a continuación la palabra positiva) convergen a u_0 cuando $t \to +\infty$. Exceptuando dos semiórbitas en U, Γ_1, Γ_2, llamadas separatrices, que convergen a u_0 de forma tangente a $u_0 + V_2$ (en sentidos opuestos) cuando $t \to +\infty$, todas las restantes semiórbitas en U se acercan a u_0 de forma tangente a $u_0 + V_1$. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$.*

Teorema 10. *Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo de $f'(u_0)$.*

a) *Si el índice de λ_1 es uno entonces existe un entorno U de u_0 donde todas las semiórbitas convergen a u_0 cuando $t \to +\infty$. Además, por cada semirecta que empieza en x_0 se aproxima una única semiórbita γ^+ a u_0, de forma tangente a dicha semirecta, cuando $t \to +\infty$.*

b) *Si el índice de λ_1 es dos entonces existe un entorno U de u_0 donde todas las semiórbitas convergen a u_0 cuando $t \to +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a la recta $u_0 + V_1$.*

En la demostración de los resultados precedentes está implícito el siguiente caso particular del teorema de Lyapunov antes citado

Corolario. *Sea u_0 un punto crítico de la ecuación (1) tal que alguno de los autovalores de $f'(x_0)$ tiene la parte real positiva. Entonces u_0 es inestable.*

Ejemplo 1. El punto $(0, 0)$ del sistema de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} u' = u(1 - v) \\ v' = \alpha v(u - 1), \end{cases}$$

es un punto de silla donde el eje v es la variedad estable, el eje u la inestable.
Ejemplo 2. Consideremos el sistema competitivo adimensionalizado:

$$\begin{cases} u' = u(1 - u - \beta v) \\ v' = \alpha v(1 - u - \gamma v), \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$. Con indepencia de los valores relativos de estos parámetros se tienen siempre los equilibrios $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. En los casos de coexistencia, $\beta < 1, \gamma < 1$ o $\beta > 1, \gamma > 1$

se tiene además el equilibrio de componentes positivas:

$$u^* = \frac{\beta - 1}{\beta\gamma - 1} \qquad v^* = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma - 1}.$$

El punto (0,0) es siempre un nodo inestable. (u^*, v^*) es nodo estable si $\beta, \gamma < 1$ y punto de silla si $\beta, \gamma > 1$. Cuando (u^*, v^*) es nodo estable, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son puntos de silla. Si (u^*, v^*) es punto de silla entonces $(1, 0), (0, 1)$ son nodos estables. Más aún, la variedad estable Γ de (u^*, v^*) marca la curva separatriz entre los dos comportamientos.

Si $\beta > 1$ y $\gamma < 1$ el punto $(0, 1)$ es nodo estable, globalmente atractivo en $\mathbb{R}^2_+$ mientras $(1, 0)$ es un punto de silla. Por contra, si $\beta < 1$ y $\gamma > 1$, los papeles de estos puntos se invierten.

Sistemas hamiltonianos con un grado de libertad

Definición. Se dice que una función C^1, $V = V(u)$, es una integral primera del sistema:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad u \in \mathbb{R}^N,$$

si $V(u(t)) = c$ (constante) para cada solución $u(t)$ de (1).

Propiedad 11. *Una función $V = V(u)$ de clase C^1 es una integral primera para (1) si y sólo si*

$$\nabla V(u) \cdot f(u) = 0 \quad (\textit{producto escalar})$$

para cada $u \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. La función $V(u, v) = \alpha u + v - \alpha \log u - \log v$ es una integral primera de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Ejemplo 2. Si consideramos la ecuación orbital:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{f_2(u_1, u_2)}{f_1(u_1, u_2)},$$

la integramos con datos iniciales $u_2(a) = b$, la solución tendrá la forma $u_2 = h(u_1, a, b)$. Si despejamos b en términos de u_1, u_2 (lo cual puede hacerse localmente) obtenedremos una integral primera $V(u_1, u_2)$. En el caso $du_2/du_1 = -u_1/u_2$.

Propiedad 12. *Supongamos que la ecuación C^1*

$$\begin{cases} u_1' = f(u_1, u_2) \\ u_2' = g(u_1, u_2) \end{cases}$$

cumple:

$$div(f, g) = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial g}{\partial u_2} = 0 \quad \textit{en } \mathbb{R}^2.$$

Entonces se puede determinar una una función C^1, $V = V(u_1, u_2)$ (única salvo constantes aditivas) definida en todo $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = f \qquad \frac{\partial V}{\partial u_1} = -g,$$

En particular, $V(u_1, u_2)$ es una integral primera en dicho entorno.

Nota. Esta propiedad puede extenderse a dominios Ω del plano si estos son simplemente conexos. Asimismo, la existencia en el plano de integrales primeras en el entorno de un punto singular, normalmente es evidencia de la existencia de (infinitas) órbitas cerradas rodeando al punto singular.

Observaciones. Las órbitas de un sistema plano con una integral primera $V(u, v)$ están contenidas en los conjuntos de nivel

$$\{(u, v)/V(u, v) = c\}$$

(c = constante). Sin embargo, $V = c$ podría contener varios tipos de órbitas, e incluso admitir más de una componente conexa.

Averiguaremos el número de órbitas (infinito en casos patológicos) dentro de una curva de nivel $V = c$.

Propiedad 13. *Sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 una integral primera global de la ecuación plana:*

$$\begin{cases} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v). \end{cases}$$

Si C denota el conjunto de puntos de equilibrio de la misma entonces cada conjunto de nivel $\{V = c\}$ hay tantas órbitas como componentes posea $\{V = c\} \backslash C$ y exceptúamos entonces los equilibrios.

Ejemplo. La ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

admite la integral primera:

$$V = -\frac{y^2}{2} + -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

La curva de nivel

$$V(x, y) = \frac{1}{6},$$

consta de cuatro órbitas. Una de ellas $(1, 0)$. Si quitamos $(1, 0)$ de $V = 1/6$ obtenemos tres componentes que son las órbitas no triviales que hay en $V = 1/6$. La componente acotada conecta el punto $(1, 0)$ consigo mismo en tiempo infinito. Tal órbita se llama homoclínica (ver más adelante).

Los sistemas considerados en la Propiedad 12 reciben un nombre especial.

Definición. *Un sistema hamiltoniano con N grados de libertad es aquel de la forma:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v}(u,v) & u \in \mathbb{R}^N \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial u}(u,v) & v \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $H \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ es la llamada función C^2 hamiltoniana del sistema.

La ecuación escalar:

$$u'' + f(u) = 0 \qquad u \in \mathbb{R},$$

o su contrapartida N dimensional:

$$u'' + \nabla V(u) = 0 \qquad u \in \mathbb{R}^N,$$

$V \in C^2(\mathbb{R}^N)$, son dos de los ejemplos más importantes de ecuaciones hamiltonianas. El caso escalar se puede escribir,

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -f(u), \end{cases}$$

donde:

$$H(u,v) = \frac{v^2}{2} + \int_0^u f(s)\, ds.$$

Clasificaremos todas las órbitas de la ecuación,

$$u'' + f(u) = 0,$$

en términos de su energía potencial $F(u) = \int_0^u f(s)\, ds$.

Definición. *Una órbita γ de la ecuación*

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad u \in \mathbb{R}^N,$$

se dice "heteroclínica" si $\lim_{t\to-\infty} u(t) = u_1$ y $\lim_{t\to+\infty} u(t) = u_2$, para ciertos $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^N$, donde u es una solución que parametriza γ.

Se dice que γ es "homoclínica" si $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = u_1$ para cierto $u_1 \in \mathbb{R}^N$ y u una solución parametrizando γ.

Teorema 13. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación:*

$$u'' + f(u) = 0 \qquad \begin{cases} u' = v \\ v' = -f(u). \end{cases}$$

Se tienen entonces las siguientes propiedades.

i) *Los equilibrios (u,v) son $P_0 = (u_0, 0)$ donde $f(u_0) = 0$. Si $f'(u_0) < 0$ entonces P es un punto de silla, mientras que si $f'(u_0) > 0$ se tiene que P es un centro no lineal.*

ii) *A cada* $c \in \mathbb{R}$ *e intervalo* $I = (a,b) \subset F^{-1}\{(-\infty, c)\}$, $F(a) = F(b) = c$, $f(a)f(b) \neq 0$ *corresponde una única órbita cerrada que pasa por los puntos* $A = (a,0)$, $B = (b,0)$ *de periodo:*

$$T = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{F(b) - F(s)}}.$$

iii) *A cada* $c \in \mathbb{R}$ *e intervalo* $I = (a,b) \subset F^{-1}\{(-\infty, c)\}$, $F(a) = F(b) = c$, $f(a) = 0, f(b) \neq 0$ *(respectivamente,* $f(a) \neq 0, f(b) = 0$*), corresponde una única órbita homoclínica* γ *que pasa por* $B = (b,0)$ *(*$A = (a,0)$*) y es asintótica a* $A = (a,0)$ *(*$B = (b,0)$*).*

iv) *A cada* $c \in \mathbb{R}$ *e intervalo* $I = (a,b) \subset F^{-1}\{(-\infty, c)\}$, $F(a) = F(b) = c$, $f(a) = f(b) = 0$ *corresponden una pareja de órbitas heteroclínicas* γ, γ', *asintóticas a los puntos* $A = (a,0)$ *y* $B = (b,0)$.

Conjuntos límite.

Definición. Sea $u(t)$ una solución de la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad u \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

definida en $(-\infty, +\infty)$. Se dice que z es un punto ω-límite (respectivamente α-límite) de $u(t)$ si existe $t_n \to +\infty$ (r. $-\infty$) tal que $u(t_n) \to z$.

Observaciones. Es inmediato comprobar que si dos soluciones $u(t), v(t)$ de (1) parametrizan la misma órbita γ de (1) (respectivamente la misma semiórbita positiva γ^+) entonces, al ser $v(t) = u(t+\tau)$ para alguna constante $\tau \in \mathbb{R}$, z es ω-límite de $u(t)$ si y sólo si lo es de $v(t)$. Lo mismo sucede con los puntos α-límite z de dos soluciones $u(t), y(t)$ de (1) que parametricen la misma órbita γ de (1) (o semiórbita negativa γ^-). Por eso tiene sentido hablar de los puntos α-límite u ω-límite de una órbita γ (también de los α-límite de una semiórbita negativa γ^- , de los ω-límite de una semiórbita positiva γ^+, o directamente de los respectivos conceptos para el dato inicial).

Definición. Sea γ (respectivamente, γ^-, γ^+) una órbita (r. una semiórbita) de (1). Se definen entonces los conjuntos límite como:

$$\Lambda^+(\gamma)(\text{r. } \Lambda^+(\gamma^+)) = \{z : z \text{ es } \omega\text{-límite de } \gamma \text{ (r. } \gamma^+ \text{)}\}$$
$$\Lambda^-(\gamma)(\text{r. } \Lambda^-(\gamma^-)) = \{z : z \text{ es } \alpha\text{-límite de } \gamma \text{ (r. } \gamma^- \text{)}\}$$

Ejemplos/Ejercicios.

a) Hállense las órbitas, con sus corresponcientes conjuntos α y ω-límite, de la ecuación $u' = u(1-u)$.

b) Si γ es una órbita cerrada entonces $\Lambda^+(\gamma) = \Lambda^-(\gamma) = \gamma$.

c) El conjunto ω-límite de todas las órbitas de la ecuación:

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1-\rho) \\ \theta' = -1 \ , \end{cases}$$

(con excepción del punto crítico $(0,0)$) es la órbita cerrada $\rho = 1$.

Propiedad 15. *Sea $u(t)$ una solución de la ecuación (1) tal que existe*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \bar{u}.$$

Entonces $f(\bar{u}) = 0$, es decir $\bar{u}$ es un punto crítico y además $\Lambda^+ = \{\bar{u}\}$. Recíprocamente, si para una solución o semiórbita se tiene que $\Lambda^+ = \{\bar{u}\}$, entonces se satisface que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \bar{u}$ y que $\bar{u}$ es un punto crítico.

Teorema 16. *Sea γ^+ una órbita de la ecuación (1). Entonces $\Lambda^+(\gamma^+)$ es un conjunto cerrado e invariante (es decir, si $u_0 \in \Lambda^+(\gamma^+)$ entonces $\varphi(t, u_0) \in \Lambda^+(\gamma^+)$ para cada $t \in (\alpha, \omega)$). Si además γ^+ es acotada, se tiene que $\Lambda^+(\gamma^+)$ es conexo, compacto y no vacío.*

Teorema de Poincaré-Bendixon

Teorema 17 (teorema de Poincaré-Bendixon). *Sea G un abierto de $\mathbb{R}^2$ con $\overline{G}$ compacto y sea $f = f(u)$ un campo C^1 sin puntos críticos en G. Sea γ una semiórbita de $u' = f(u)$ contenida en G. Entonces,*

a) *O bien la propia γ es una órbita cerrada,*
b) *O bien $\Lambda^+(\gamma) = \gamma_0$ es una órbita cerrada.*

Es conclusión, la ecuación $u' = f(u)$ exhibe una órbita cerrada en G.

Observación La moraleja del teorema previo es que toda solución que entra en una región G como la del teorema, o bien es periódica, o bien "tiende" a una solución periódica de la ecuación (la que tiene a γ_0 por órbita). En cualquier caso, el verdadero valor consiste en establecer la existencia de soluciones periódicas en G. Por otra parte existe una versión más completa del teorema que incluye el caso en que G contiene una cantidad finita de puntos críticos de f (cf. el libro de J. Hale).

El problema de la existencia de órbitas cerradas puede abordarse con ayuda de resultados auxiliares. Uno de ellos es el siguiente hecho básico:

Propiedad 18. *Sea $f = f(u)$ un campo C^1, γ una órbita cerrada de $u' = f(u)$. Entonces siempre existe un punto crítico de f en el interior de γ.*

A la hora de localizar posibles órbitas cerradas y de probar la existencia y distribución de puntos críticos, una herramienta muy útil es el *índice* de Poincaré, que sin embargo no vamos a considerar aquí.

Algunas veces, uno puede también descartar la existencia de soluciones periódicas en ciertas regiones del plano. A tal efecto se dispone, por ejemplo, del siguiente resultados.

Propiedad 19 (criterio negativo de Bendixon). *Sea f un campo C^1 en el plano mientras que en una cierta región $G \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexa existe $\mu = \mu(u_1, u_2)$ de clase C^1 tal que:*

$$\partial_{u_1}(\mu f_1) + \partial_{u_2}(\mu f_2)$$

tiene signo constante en G. Entonces la ecuación $u' = f(u)$ no admite órbitas cerradas en G.

Funciones de Lyapunov. Sistemas gradiente

Definición. *Se dice que* $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *es una función de Lyapunov de la ecuación* $du/dt = f(u)$, $u \in \mathbb{R}^N$, *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *si:*

$$\dot{V}(u) = \nabla V(u) f(u) \leq 0 \qquad u \in \Omega.$$

Teorema 20. *Si* γ^+ *es una semiórbita acotada de la ecuación* $du/dt = f(u)$, $\gamma^+ \subset \Omega$, *de forma que dicha ecuación admite una función* $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *que es de Lyapunov en* Ω, *entonces:*

$$u(t) \to M \qquad t \to +\infty,$$

donde M *es el conjunto maximal invariante de la ecuación contenido en* E, *con*

$$E = \{u \in \overline{\Omega} : \dot{V}(u) = 0\}.$$

Ejemplo. El resultado se usa para concluir que comportamiento cuando $t \to +\infty$ de cualquier semiórbita γ^+ de la ecuación $u'' = -f(u) - c\dot{u}$, $c > 0$, es punto de equilibrio. En efecto, $H(u, \dot{u}) = \dot{u}^2 + \int_0^u f$ es una función de Lyapunov global.

Ejercicios del Capítulo II

1. Trazar el espacio de fases de las ecuaciones lineales:

$$a)\ x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad b)\ x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad c)\ x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad d)\ x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

2. Transformar mediante un cambio adecuado de variables de la forma $x = Py$ la ecuación lineal bidimensional:

$$x' = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde la matriz A puede tomar uno de los siguientes valores:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Estudiar el espacio de fases y discutir los comportamientos α y ω límite de las ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2^2, \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1' = x_1^2 \\ x_2' = -x_2, \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 - x_2^3, \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1' = x_1 - x_1^3 \\ x_2' = x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

4. Obtener un boceto de las órbitas de las ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x_1' = x_2(x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1(x_1^2 - x_2^2), \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1' = x_2(1 - x - 1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1(1 - x - 1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

5. Demostrar que el origen $u = (0,0)$ es asintóticamente estable para las ecuaciones $u' = f(u)$ donde:

$$a) \quad f(u) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \qquad f(u) = \begin{pmatrix} \cos x_1 - \text{ sen } x_1 - 1 \\ x_1 - x_2 - x_2^2 \end{pmatrix}.$$

6. Hállense los puntos singulares y decídase –siempre que sea posible– el comportamiento de las órbitas en las proximidades de dichos puntos:

$$a) \begin{cases} x_1' = 1 - x_2 \\ x_2' = x_1^3 + x_2, \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1' = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ x_2' = (x_1 + 1)(x_2 + 1), \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - x - \delta y, \end{cases} \qquad d) \begin{cases} u' = v + u - \dfrac{1}{3}u^3 \\ v' = -\varepsilon u \end{cases} \quad (\varepsilon > 0),$$

$$e) \; u'' + cu' + u(1-u) = 0 \qquad c \in \mathbb{R}.$$

En el caso c) demuéstrese que las soluciones $(x(t), y(t))$ de la ecuación hacen constante la función:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva en $\mathbb{R}^2$: $\varphi(x) > 0$. Demuéstrese que las ecuaciones:

$$x' = f(x),$$

y

$$x' = \varphi(x) f(x),$$

comparten las mismas órbitas.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ una aplicación C^1 tal que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se recuerda entonces que existe una función $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, tal que:

$$f_1 = V_{x_1} \qquad f_2 = V_{x_2}.$$

a) Demuéstrese que todas las soluciones de la ecuación:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

hacen constante $V(x_1, x_2)$.

b) Demuéstrese que todas las soluciones de la ecuación:

$$x'' + f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R},$$

hacen constante la función (energía):

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)\, ds,$$

donde $y = x'$.

c) Aprovéchese la información precedente para trazar el espacio de fases de las ecuaciones siguientes:

$$x'' + \text{ sen } x = 0$$
$$x'' + x - x^2 = 0$$
$$x'' + x - x^3 = 0.$$

Estúdiense con detalle las diversas órbitas observadas.

9. La ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

se llama ecuación de Fisher en genética de poblaciones. Las soluciones de la forma:

$$u(x, t) = U(x - ct) \qquad c \geq 0,$$

se denominan "ondas viajeras". El grupo $\zeta = x - ct$ se denomina fase de la onda, c su velociad de propagación. Ondas estacionarias son las que tienen velocidad nula, $c = 0$.

i) Pruébese que las ondas viajeras cumplen la ecuación:

$$U''(\zeta) + cU'(\zeta) + U(\zeta)(1 - U(\zeta)) = 0 \qquad ' = \frac{d}{d\zeta}.$$

ii) Estudiar el espacio de fases de las ondas estacionarias (c=0), con especial interés en los puntos de equilibrio.

iii) Repetir el estudio con el caso no estacionario $c > 0$.

10. Usar funciones de tipo Lyapunov cuadráticas para estudiar el comportamiento de las soluciones cerca de $u = (0, 0)$ de las ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x_1' = x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_2' = -2x_1^2 x_2 - x_2^3, \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1' = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ x_2' = -2x_1 x_2^2, \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1' = x_1^3 - x_2^3 \\ x_2' = x_1 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 + x_2^3. \end{cases}$$

Oscilaciones mecánicas (ver Capítulo III)

11. Determinar el periodo de las oscilaciones del péndulo simple:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \text{ sen } \theta,$$

en términos de la semiamplitud a, probando a tal efecto que dicha semiamplitud corresponde a los datos iniciales:

$$\theta(0) = a \qquad \dot{\theta}(0) = 0.$$