CAPÍTULO I
ECUACIONES, ÓRBITAS, EQULIBRIOS

Introducción

Gran parte del curso gira en torno a modelos matemáticos que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales. Una aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ u &\mapsto f(u), \end{aligned}$$

$u = (u_1, \ldots, u_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$, será denominada muchas veces "campo" en $\mathbb{R}^N$, también "campo de velocidades". La correspondiente ecuación diferencial asociada se escribirá:

$$\frac{du}{dt} = f(u). \tag{1}$$

En el ambiente del curso, un cierto sistema de la realidad estará caracterizado por N magnitudes escalares $u_1, \ldots, u_N$ que dependen del tiempo t. Las magnitudes interactuarán y su evolución o tasa de variación en el tiempo podrá describirse mediante (1) que es, en realidad, una ecuación de conservación (como apreciaremos en muchos casos). El problema que nos interesará consistirá en predecir el comportamiento del sistema a partir de información u_0 del mismo en un momento dado t_0:

$$u(t_0) = u_0 = (u_{01}, \ldots, u_{0N}).$$

La tarea del matemático consiste bien en resolver exactamente, formalmente o numéricamente el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

También o alternativamente, determinar si (1) tiene soluciones especialmente simétricas: equilibrios, soluciones periódicas, cuasiperiódicas, etc. Interesa saber qué soluciones son persistentes frente a perturbaciones, es decir cuándo son suficientemente estables. Será también de gran importacia la variación en las propiedades de algunas de las soluciones de nuestro modelo cuando varían los parámetros característicos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ presentes en el mismo. Estos parámetros deben reflejarse en el segundo miembro de la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda).$$

Ejemplos

a) *Mecánica.* Una partícula puntual de masa m, posición $u \in \mathbb{R}^3$, velocidad $v = du/dt \in \mathbb{R}^3$ sometida a un campo de fuerzas $F = F(u)$, describe una trayectoria que satisface la ecuación:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F(u), \tag{2}$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

equivalentemente:

$$\frac{du}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = m^{-1}F(u).$$

La ecuación (2) se deduce del principio de conservación del momento lineal (segunda ley de Newton).

b) *Fluídos.* Una de las magnitudes que se deben conocer para determinar el estado de un fluído "estacionario" (líquido o gas) es lo que se conoce como su "campo de velocidades" $f = f(u)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Una vez determinado f las trayectorias $u = u(t)$ descritas por las partículas fluídas se determinan integrando la ecuación $du/dt = f(u)$.

c) *Reactores químicos.* En un reactor de "agitación continua" un cierto número de sustancias, suministradas a flujo constante, reaccionan para dar una serie de productos (también retirados del reactor a ritmo constante) así como una serie de sustancias intermedias $u_1, \ldots, u_N$ que se consumen o producen con tasas que vienen descritas por el sistema:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_1, \ldots, u_n, \lambda) \qquad 1 \leq i \leq N,$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ son diversos parámetros del sistema (velocidades de reacción, temperaturas, etc). En algunos casos, la reacción tiene como misión abastecer de espacies químicas fundamentales a organismos vivos para su metabolismo, o regular el funcionamiento de ciertos órganos, o controlar la segregación de hormonas, etc. En este escenario las soluciones periódicas representan los ciclos biológicos.

c) *Dinámica de poblaciones.* La ecuación (1) representa ahora la interacción de N especies en un medio, de forma que $f_i(u_1, \ldots, u_N)$ describe la ley de crecimiento (balance de mortalidad y natalidad). Una formulación acertada del modelo y su correspondiente análisis matemático pueden dar orientaciones robustas sobre políticas de explotación de capturas -"desarrollo sostenible"-, inserción de nuevas especies en un hábitat dado, prevención de plagas y de propagación de epidemias, etc.

d) *Circuitos.* En un circuito eléctrico, las cargas fluyen con una intensidad I bajo la acción de una diferencia de potencial V. Típicamente, I, V satisfacen ecuaciones diferenciales cuya forma depende de los dispositivos insertados en el circuito. Dichos dispositivos son los que controlan su funcionamiento.

Observación. En algún momento tendremos ocasión de trabajar con campos y ecuaciones no autónomas. Por ejemplo:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

en donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es un campo que depende del tiempo. Este escenario es particularmente adecuado cuando las tasas de variación dependen de factores "estacionales".

Ecuaciones autónomas, campos, generalidades.

El resultado fundamental de ecuaciones que emplearemos es el siguiente.

Teorema [Picard-Lindelöf]. *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una aplicación (campo) de clase C^1, entonces el problema:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{P}$$

admite para cada $u_0 \in \mathbb{R}^N$ una única solución maximal $u = u(t)$, $u : I \to \mathbb{R}^N$, $I = (\alpha, \beta)$, $t_0 \in I$, $\alpha = \alpha(u_0)$, $\beta = \beta(u_0)$.

Observaciones.

a) *Comportamiento en los extremos.* Se sabe que además:

$$\lim_{t \to \alpha+} |u(t)| = \lim_{t \to \beta-} |u(t)| = +\infty.$$

Se dice que una solución es global para $t \geq t_0$ si $\beta = +\infty$, diciéndose en caso contrario que "explota" en tiempo finito.

b) *Traslación de fase. Flujo.* Conviene llamar $u = \varphi(t, u_0)$ a la solución de:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

El dominio de φ es un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ de suerte que $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Nótese que la solución de (P) (tiempo inicial $t_0 \neq 0$) puede expresarse como:

$$u(t) = \varphi(t - t_0, u_0).$$

La aplicación φ se denomina el "*flujo*" asociado a la ecuación $du/dt = f(u)$. Satisface las propiedades:

i) $\varphi(0, u_0) = u_0$.

ii) $\varphi(t + s, u_0) = \varphi(t, \varphi(s, u_0))$ (propiedad de semigrupo).

Toda aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$, X un espacio métrico por ejemplo, que sea continua y cumpla i), ii) se denomina un flujo en X o un "sistema dinámico" en X.

c) *Dependencia continua y regular con respecto a datos iniciales y parámetros.* Que φ sea de clase C^1 significa que la solución de (P), $u(t) = u(t, t_0, u_0) = \varphi(t - t_0, u_0)$ depende de manera regular con respecto a (t_0, u_0), en un horizonte de tiempo finito. En particular, si $\varphi(t, u_0)$ está definida en $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, entonces $\varphi(t, \hat{u}_0)$ también está definida en $[a, b]$ para $\hat{u}_0$ próximo a u_0. Además:

$$u(\cdot, \hat{u}_0) \to u(\cdot, u_0) \qquad \dot{u}(\cdot, \hat{u}_0) \to \dot{u}(\cdot, u_0) \qquad \dot{} = \frac{d}{dt},$$

uniformemente en $[a, b]$, cuando $\hat{u}_0 \to u_0$. Si el segundo miembro de la ecuación depende C^1 de k parámetros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, es decir $f = f(u, \lambda)$, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ es C^1 entonces la solución $u = \varphi(t, u_0, \lambda)$ del problema $du/dt = f(u, \lambda)$, $u(0) = u_0$ es también una función C^1 de sus argumentos.

d) *Ecuaciones no autónomas.* Resultados similares -exceptuando las propiedades de sistema dinámico que deben reformularse propiamente- son válidas para ecuaciones no autónomas con segundo miembro C^1: $du/dt = f(t,u)$.

e) *Segundo miembro contino.* Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es sólo continua todas las afirmaciones del teorema de Picard-Lindelöf son válidas con excepción de la unicidad de soluciones (teorema de Cauchy-Peano).

El caso escalar

Un resultado auxiliar que explotaremos sistemáticamente para garantizar la resolución de ecuaciones es el teorema de la función implícita.

Teorema. *Sea* $F : U^{\text{abto.}} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *una aplicación* C^m, *tal que existe* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^N$:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) $\exists\, D_y F(x_0, y_0)^{-1}$, *es decir* $D_y F(x_0, y_0) \in Iso\,(\mathbb{R}^N)$, det $D_y F(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces existen $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2$, *y una aplicación*

$$\begin{aligned} f : B_{\varepsilon_2}(x_0) \subset \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

de clase C^m *cumpliendo:*

(1) $\forall x : |x - x_0| < \varepsilon_2$:

$$F(x, f(x)) = 0,$$

siendo además $y_0 = f(x_0)$ (existencia de soluciones).

(2) *Si el par* (x, y) *satisface:*

$$F(x, y) = 0,$$

junto con:

$$|x - x_0| < \varepsilon_1 \qquad |y - y_0| < \varepsilon_2,$$

entonces (unicidad de soluciones):

$$y = f(x).$$

Teorema de Picard-Lindelöf en el caso escalar

Supongamos que f es C^1 en $\mathbb{R}$ y queremos resolver:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Si $f(u_0) = 0$ una solución es $u = u_0$ (la única como veremos después). Si $f(u_0) \neq 0$ entonces $f \neq 0$ en un intervalo máximo $J = (a, b)$ con $u_0 \in J$. Nótese que pueden ser $a = -\infty$ o $b = +\infty$, pero f habrá de anularse en a o b si éstos son finitos.

La función:

$$H(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{f(s)}$$

es monótona e invertible sobre J con $H(u_0) = 0$ mientras que *toda* solución u de (P) cumplirá:

$$H(u) = t - t_0 \tag{3}$$

siempre que $t - t_0 \in H^{-1}(J) = I_0$, donde $I_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ pudiendo ser finitos o no los extremos de I_0. De la unicidad de soluciones de (3) se sigue que toda otra solución de (P) ha de coincidir con u en $I = (\alpha_0 + t_0, \beta_0 + t_0)$. Probamos ahora que I es el intervalo maximal de existencia lo que implicará la unicidad. En efecto, ninguna solución de (P) puede polongase a un intervalo mayor que $[t_0, t_0 + \beta_0)$ a la derecha de t_0. Esto es obvio si $\beta_0 = +\infty$. Si por otra parte $\beta_0 < +\infty$ la solución de (3) $u(t) = H^{-1}(t - t_0)$ satisface:

$$\lim_{t \to t_0 + \beta_0} u(t) = b.$$

Si $b = \pm\infty$, u sufre una singularidad en $t_0 + \beta_0$ (asíntota vertical) y no es posible prolongarla en $t \geq t_0 + \beta_0$. Luego hemos terminado.

Por otro lado se tiene:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{ds}{f(s)} = t - t_0, \qquad t \in [t_0, t_0 + \beta_0).$$

Por eso:

$$\int_{u_0}^{b} \frac{ds}{f(s)} = \beta_0.$$

Si $f(b) = 0$ tendremos, al ser f *derivable* en b:

$$|f(s)| \leq L|s - b|,$$

para s próximo a b. Por tanto:

$$\int_{u_0}^{b} \frac{ds}{f(s)} \geq \int_{u_1}^{b} \frac{ds}{f(s)} \geq \int_{u_1}^{b} \frac{ds}{L(b - s)} = +\infty,$$

para u_1 próximo a b lo que no es posible (hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que $u(t) < b$).

Nota. En la última parte hemos probado que una solución u no puede tocar en tiempo finito t un cero b de f. De ahí, si $f(u_0) = 0$, $u = u_0$ es la única solución posible de (P).

Se prueba de la misma manera que $(t_0 + \alpha_0, t_0]$ es el máximo intervalo de existencia en el pasado y que:

$$\lim_{t \to t_0 + \alpha_0} u(t) = a.$$

En consecuencia, el intervalo máximo de existencia es $I = (\alpha, \beta)$ con $\alpha = t_0 + \alpha_0$, $\beta = t_0 + \beta_0$ con lo que hemos probado el teorema de Picard-Lindelöff en su totalidad.

Observación. Nos ha salido al paso una clase importante de soluciones de la ecuación (1).

Definición. *Se dice que $u_0 \in \mathbb{R}^N$ es una solución de equilibrio o solución estacionaria de la ecuación N-dimensional:*

$$\dot{u} = f(u), \tag{1}$$

(también se dice que u_0 es una singularidad o punto crítico del campo $f(u)$) si se satisface que:

$$f(u_0) = 0.$$

El comportamiento global de las soluciones de una ecuación autónoma escalar puede describirse en dos pinceladas mediante sus órbitas y el correspondiente espacio de fases. Las definiciones correspondientes son las que siguen.

Definición. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y la ecuación asociada:*

$$\dot{u} = f(u).$$

Para $u_0 \in \mathbb{R}^N$ se definen los tres conjuntos de $\mathbb{R}^N$:

i) *Órbita que pasa por u_0, $\gamma_{u_0} = \{\varphi(t, u_0) : t \in (\alpha, \beta)\} \subset \mathbb{R}^N$.*
ii) *Semiórbita positiva que pasa por u_0, $\gamma^+_{u_0} = \{\varphi(t, u_0) : t \in [0, \beta)\} \subset \mathbb{R}^N$.*
iii) *Semiórbita negativa que pasa por u_0, $\gamma^-_{u_0} = \{\varphi(t, u_0) : t \in (\alpha, 0]\} \subset \mathbb{R}^N$.*

Teorema. *Sea:*

$$\dot{u} = f(u),$$

una ecuación autónoma escalar de clase C^1, $u_0 \in \mathbb{R}$. Si $\gamma^+_{u_0}$ (respectivamente, $\gamma^-_{u_0}$) está acotada entonces $u(t) = \varphi(t, u_0)$ está definida en $[0, +\infty)$ (r. $(-\infty, 0]$), $\exists \lim_{t \to +\infty} = b$ (r. $\exists \lim_{t \to -\infty} = a$) y además $f(b) = 0$ ($f(a) = 0$).

Definición. *Se llama espacio de fases de una ecuación autónoma y C^1 en $\mathbb{R}^N$:*

$$\dot{u} = f(u),$$

a la familia *de* todas *sus órbitas.*

Observaciones. a) Las órbitas más sencillas son los puntos $\{u_0\}$ que corresponden a las soluciones estacionarias.

b) Para una ecuación escalar $\dot{u} = f(u)$, $u \in \mathbb{R}$, las órbitas son de dos tipos. Los puntos (ver a)) o los intervalos.

c) Si la ecuación autónoma es N dimensional, las órbitas pueden tener formas muy complicadas.

La segunda clase de soluciones u que dan lugar a órbitas sencillas son las T-periódicas.

Definición. *Se dice que una solución $u(t)$ de la ecuación N-dimensional (1) es periódica de período T si $\forall t \in \mathbb{R} : u(t + T) = u(t)$.*

Observaciones Si u tiene periodo T también mT, $m \in \mathbb{Z}$, es un periodo. Los periodos de una función forman un grupo. Se dice que T es el *periodo minimal* de una función periódica si $T > 0$ y si T es el menor de los periodos positivos. Se demuestra que toda función continua $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ admite un periodo minimal.

Algunos modelos escalares

Principios de conservación. Las ecuaciones diferenciales en la mayoría de los modelos que estudiamos surgen de principios de conservación. La mecánica se construye en base al principio de conservación del momento lineal. La dinámica de poblaciones describe el número de individuos usando información sobre las tasas de crecimiento, emigración y posibles factores de depredación, simbiosis o competición. Los circuitos eléctricos se describen en base a la conservación de la carga. Los fenómenos de trasporte emplean el principio de conservación de la masa (las ecuaciones resultantes se denominan ecuaciones de continuidad).

Gran parte de los modelos pueden concebirse como un sistema cuyo estado se caracteriza por una variable c, $c = c(t)$, mientras se conocen el flujo de entrada I (número de unidades de c que entran en el sistema por unidad de tiempo) y de salida E. El principio de conservación para c se expresa mediante la ecuación:

$$\frac{dc}{dt} = I - E.$$

Como ejemplo sencillo considérese un tanque abierto en el que entra un caudal de agua de k_1 litros/segundo y del que se evapora una cantidad proporcional a la potencia $2/3$ del volumen v alojado en el tanque. La ecuación de continuidad para el volumen es:

$$\frac{dv}{dt} = k_1 - k_2 v^{2/3}.$$

Como otro ejemplo consideremos el problema de la contaminación de las aguas. La *eutroficación* es la disciplina que estudia el mantenimiento, en condiciones de salubridad, de masas de agua embalsadas en presas, lagos, depósitos, etc. Supongamos que un contaminante orgánico se deposita en un embalse a razón de σ unidades de concentración/segundo. Una especie de bacterias en el agua se encarga de degradar el contaminante, empleando para ello una cierta concentración del oxígeno x_2 disuelto en el agua. Se admite que la tasa con la que se degrada el contanimante coincide con la de consumo de oxígeno, siendo éstas proporcionales a la concentración x_1 del contaminante. Por otra parte, el oxígeno se renueva por difusión a través de la superficie del líquido. La tasa de renovación se supone proporcional a la diferencia $x_m - x_2$ donde x_m representa la concentración de oxígeno fijada en el agua (una fracción de la del oxígeno en el aire). Las ecuaciones de conservación para x_1 y x_2 son:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma - k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -k_1 x_1 + k_2(x_m - x_2). \end{aligned}$$

Se concluye que las concentraciones se estabilizan en torno a los valores:

$$x_1^* = \frac{\sigma}{k_1} \qquad x_2^* = x_m - \frac{\sigma}{k_2}.$$

Comprúebese como ejercicio.

Dinámica de poblaciones. En demografía se habla de tasas anuales de natalidad ν y mortalidad μ de una población:

$$\nu = \text{nacimientos/ } N \times \text{año}, \quad \mu = \text{fallecimientos/ } N \times \text{año},$$

donde N es la población al comienzo del año (o periodo de tiempo fijo en el que se haga el estudio).

Consecuentemente, si el número de individuos de una población en t es $N(t)$, las tasas medias de natalidad y mortalidad en el periodo $[t, t+\Delta t]$ se definen como[1]:

$$\nu(t, \Delta t, N(t)) = \frac{n(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t} \qquad \mu(t, \Delta t, N(t)) = \frac{m(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t},$$

con n y m los nacimientos y muertes en Δt uniades de tiempo a partir de t. Un principio natural de conservación es:

$$N(t+\Delta t) - N(t) = n(t, \Delta t) - m(t, \Delta t) + \text{Emigración Neta}.$$

Si suponemos que habitat está aislado y no hay fugas apreciables de individuos el último termino es nulo. Al dividir por $N(t)\Delta t$ y hacer Δt tender a cero tenemos:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \nu(t, N(t)) - \mu(t, N(t)),$$

donde:

$$\nu(t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \nu(t, \Delta t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t},$$

$$\mu(t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \mu(t, \Delta t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t, \Delta t)}{N(t)\Delta t},$$

son las tasas instantáneas de natalidad y mortalidad.

En la ley de crecimiento de Malthus se supone que:

$$\nu - \mu = r,$$

donde r es una constante que podíamos designar como tasa de crecimiento neto. La ley de conservación es:

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

Si $r > 0$ entonces $N(t) = N(0)e^{rt}$; a intervalos regulares de tiempo T la población $N(kT) = N(0)\rho^k$ donde $\rho = e^{rT}$. Por consiguiente, una población en fase de desarrollo donde (1) es aceptable evoluciona con crecimiento geométrico.

[1]Por una cuestión de escritura suponemos que éstas sólo dependen del instante inicial t, el periodo de tiempo Δt y del número inicial de individuos $N(t)$. Sin embargo las tasas podrían ser función, por ejemplo, de factores estacionales o de la historia de la población.

En un modelo más realista, la tasa instantánea de crecimiento $\{1/N\}dN/dt$ es malthusiana para N pequeño. Cuando la población crece, ésta acaba autoregulándose para adaptarse a los recursos disponibles y una versión fenomenológica de este hecho es poner:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} &= a - bN \\ &:= r - r\frac{N}{K} \\ &= r(1 - \frac{N}{K}).\end{aligned}$$

En la primera línea, $a, b > 0$ representan los parámetros biológicos de la población. En la segunda r es la tasa de crecimiento intrínseca y $K > 0$ (que tiene dimensiones de número de individuos) es la capacidad de soporte del medio. La ecuación de continuidad es:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{1}{N}), \qquad (L)$$

que se conoce como ecuación logística o de Verlhust.

La adimensionalización natural de (L) consiste en definir:

$$u = N/K \qquad \tau = rt,$$

y (L) toma la forma:

$$\frac{du}{d\tau} = u(1 - u). \qquad (A)$$

La solución de (A) con dato $u(0) = u_0$ es:

$$u = \frac{u_0}{u_0 - (u_0 - 1)e^{-\tau}}.$$

En la versión adimensional concurren varias ventajas:

a) La simplificación máxima en el número de parámetros.
b) Las variables u y τ no dependen de la escala inicial de medidas para N y t. Las variables u y τ tanto si N se mide en miles de individuos y t en segundos como si N se mide en centenares de miles y t en meses.
c) En la escala u la unidad de medida es K y en la τ la unidad es r^{-1}. Es en estas unidades en las que puede medirse en tiempo y número de individuos del orden de la unidad, las perturbaciones de la especie respecto a su población de equilibrio K. Hablando en términos de política pesquera, las "paradas biológicas" que permiten a la población recuperar valor de equilibrio K se miden en múltiplos de r^{-1} del orden de la unidad.

Estabilidad de equilibrios. Tiempo de relajación.

Consideremos una ecuación N-dimensional:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad u \in \mathbb{R}^N,$$

y una solución de referencia $u = u^*(t)$ que puede ser perfectamente un equilibrio. Supongamos además que u^* es permanente en el sentido que u^* está definida para todos los valores del tiempo $t \geq 0$. La estabilidad de u^* se precisa en la siguiente definición.

Definición.

i) *Se dice que* u^* *es* estable *si* $\forall \varepsilon$, $\exists \delta > 0$ *tal que* $\forall u_0 \in \mathbb{R}^N$ *tal que:* $|u_0 - u^*(0)| < \delta$ *se tiene* $\forall t \geq 0$ *que* $|u(t) - u^*(t)| < \varepsilon$.

ii) *Si además de poseer la propiedad de estabilidad* u^* *cumple que* $\exists \eta > 0$ *tal que si* $|u_0 - u^*(0)| < \eta$ *entonces* $u(t) - u^*(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$ *se dice que* u^* *es* asintóticamente estable.

iii) *La propiedad de no ser estable se tipifica como* inestabilidad.

En la práctica es sumamente importante (y difícil) decidir la estabilidad de una solución. Una idea general del procedimiento es la que sigue. Por definición se debe estimar la perturbación:

$$v(t) = u(t) - u^*(t),$$

que satisface la ecuación:

$$v' = f'(u^*(t))v + g(v),$$

donde $g = o(|v|)$ cuando $|v| \to 0$. El "principio de la estabilidad linealizada" consiste en establecer cuándo la estabilidad se reduce a la de la ecuación:

$$v' = f'(u^*(t))v.$$

En el caso de soluciones de equilibrio se sabe que $u*$ es asintóticamente estable si todos los autovalores de $f'(u^*)$ tienen la parte real negativa, mientras que la sola existencia de uno de tales autovalores con la parte real positiva implica la inestabilida de la solución. En el caso escalar se tiene una versión sencilla de este resultado.

Teorema. *Sea* f *de clase* C^1, $f(u^*) = 0$, *por tanto* $u = u^*$ *es una solución de equilibrio de* $u' = f(u)$. *Si* $f'(u^*) < 0$, u^* *es asintóticamente estable. Si* $f'(u^*) > 0$, u^* *es inestable. Finalmente, si* $f'(u^*) = 0$ *la ecuación linealizada* $v' = f'(u^*)v$ *no decide en general la estabilidad de* u^*.

Otra propiedad interesante es la siguiente.

Teorema. *Sea* u^* *un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación* $u' = f(u)$ *correspondiente a* $f'(u^*) < 0$. *Entonces:*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log |u - u^*| = f'(u^*).$$

En particular $t_c = 1/|f'(u^*)|$ *es el tiempo característico de relajación de* u^*.

Ecuación logística con cosecha. La explotación de una población, por ejemplo el efecto de la pesca en un banco pesquero, puede simularse con la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - EN,$$

donde r, N son los parámetros de la ecuación logística, $E > 0$ la intensidad del proceso de captura (ésta se refleja mediante el número de encuentros). Éste término adicional causa que el equilibrio descienda a:

$$N_h = K(1 - \frac{E}{r}) \qquad 0 < E < r,$$

mientras la tasa de crecimiento intrínseco pasa a ser $r - E$. La ecuación puede asimismo escribirse:

$$\frac{dN}{dt} = (r - E)N(1 - \frac{N}{N_h}).$$

Una idea del rendimiento de la cosecha lo proporciona:

$$Y = Y(E) = EN_h = EK(1 - \frac{E}{r}).$$

Y frente a E tiene forma de parábola positiva en $0 < E < r$ con valor máximo en $r/2$ dado por:

$$Y_{\max} = \frac{K}{4}.$$

Nótese que el valor de Y sólo crece hasta que $E = r/2$. Después, el valor desciende hasta cero cuando $E = r$. Sin embargo, cuanto más se aproxima E a r más cerca está la especie de la extinción. Aunque N_h sea positivo, si está próximo a cero, fluctuaciones aleatorias en el medio podrían igualmente conducir la especie a la extinción. Todavía una observación más. El tiempo de recuperación $T_\rho \lambda^{*-1}$, $\lambda^* = \lambda^*(E)$ de la especie, aumenta dramáticamente en el tramo $r/2 < E < r$ hasta hacerse infinito en r. En efecto:

$$E = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r}{K}(Y_{\max} - Y)}.$$

Por otra parte:

$$\frac{T_\rho(E)}{T_\rho(0)} = \frac{r}{r - E} = \frac{1}{1 - \frac{E}{r}}.$$

Así:

$$\frac{T_\rho(E)}{T_\rho(0)} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1 - Y/Y_{\max}}}.$$

A un mismo valor de $0 < Y < Y_{\max}$ corresponden valores $E_-(Y) < r/2 < E_+(Y)$. En la rama inferior —menor intensidad E para un mismo nivel Y de capturas– el tiempo de recuperación crece hasta el doble de $T_\rho(0)$ en $Y = Y_{\max}$. En la superior –mayor intensidad para Y fijada– dicho tiempo crece del doble hasta infinito cuando Y decae de $Y_{\max}$ hasta cero. Desde el punto de vista de la explotación sostenible, es más ventajoso mantenerse en la rama inferior $E = E_-(Y)$ de la intensidad de capturas.

Cinética de reacciones químicas. En los procesos químicos dos sustancias, por ejemplo A y B, reaccionan para dar dos productos diferentes C y D, lo que se representa:

$$A + B \xrightarrow{k} C + D. \tag{1}$$

La constante k se denomina tasa de velocidad o constante de velocidad de la reacción. La cinética química estudia la velocidad a la que ocurren las reacciones. Algunas se desarrollan en lapsos de $10^{-6}s$, otras requieren años para la formación de productos[2]. En el proceso (1) una molécula de A se combina con otra de B para dar una de C y otra de D por lo que las velocidades de variación de las concentraciones cumplen:

$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = \frac{d[C]}{dt} = \frac{d[D]}{dt}. \tag{2}$$

Cualquiera de éstas define, en valor absoluto, la velocidad del proceso. En la práctica tambiém sucede que m moléculas de A combinan con n de B para dar r de C y s de D:

$$mA + nB \xrightarrow{k} rC + sD. \tag{3}$$

En este caso la relación de velocidades es:

$$-\frac{1}{m}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{n}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{s}\frac{d[D]}{dt}. \tag{4}$$

En (4) viene a ser lo siguiente. Si a, b, c, d son las concentraciones de A, B, C, D, Δa, Δb, Δc, Δd las diferencias de concentraciones entre los instantes t y $t+h$, por ejemplo $\Delta a = a(t+h) - a(t)$ (cantidades netas consumidas y producidas en h unidades de tiempo a contar desde t), entonces se tiene el balance:

$$-\frac{\Delta a}{m} = -\frac{\Delta b}{n} = \frac{\Delta c}{r} = \frac{\Delta d}{s} = \pi.$$

Es decir, π grupos de m unidades de A combinan con π grupos de n unidades de B para dar π grupos de C y D, con r y s unidades respectivamente.

La *ley de acción de masas* proporciona una relación para la velocidad neta la de reacción. En el caso (1) se tiene que:

$$-\frac{d[A]}{dt} = \frac{da}{dt} = \dot{a} = k[A]^{\mu}[B]^{\nu},$$

μ, ν positivos, mientras en el caso (3):

$$-\frac{1}{m}\frac{d[A]}{dt} = \frac{da}{dt} = k[A]^{\mu}[B]^{\nu}.$$

Los números m, n, r, s se llaman coeficientes estequiométricos, los exponentes μ, ν, órdenes de la reacción ($\mu + \nu$ el orden total). Típicamente, los órdenes se suelen tomar iguales a los coeficientes estequiométricos -que es la política que seguiremos en el presente curso- pero esto no siempre es correcto; y los órdenes de la reacción habrán de hallarse a partir de datos experimentales. Según lo dicho, y si no se advierte lo contrario, tomaremos:

$$\dot{a} = -k[A][B] = -kab \qquad (\dot{} = d/dt), \tag{5}$$

[2] B. M. Mahan, "Química", Addison-Wesley, 1990

en (1) y

$$\dot{a} = -km[A]^m[B]^n = -kma^m b^n, \tag{6}$$

en (3).

En la práctica, las reacciones son siempre "reversibles" y una versión más realista de (1) debe contemplar la reacción inversa:

$$A + B \quad \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \quad C + D. \tag{7}$$

La formulación diferencial de (7) para las concentraciones es:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -k_1 ab + k_{-1} cd \\ \dot{b} &= -k_1 ab + k_{-1} cd \\ \dot{c} &= \ \ k_1 ab - k_{-1} cd \\ \dot{d} &= \ \ k_1 ab - k_{-1} cd, \end{aligned} \tag{8.1}$$

que debe complementarse con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} a(0) &= a_0 \\ b(0) &= b_0 \\ c(0) &= 0 \\ d(0) &= 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

La dinámica de (8.1) consiste en la estabilización a una solución estacionaria cuando t crece. Es decir, la solución de (8.1-2):

$$(a, b, c, d) \to (a^*, b^*, c^*, d^*) \qquad t \to +\infty,$$

donde $\dot{a} = \cdots = \dot{d} = 0$ si $a = a^*, \ldots, d = d^*$, luego:

$$-k_1 a^* b^* + k_{-1} c^* d^* = 0.$$

En efecto, de (8.1):

$$\begin{aligned} \dot{a} = \dot{b} \qquad & \Rightarrow b = b_0 - a_0 + a \\ \dot{a} + \dot{c} = 0 \qquad & \Rightarrow c = a_0 - a \\ \dot{a} + \dot{d} = 0 \qquad & \Rightarrow d = a_0 - a. \end{aligned} \tag{9}$$

La evolución de a es:

$$\dot{a} = -k_1 a(b_0 - a_0 + a) + k_{-1}(a_0 - a)^2.$$

Esta ecuación tiene un equilibrio $0 < a^* < a_0$, $a^* = a^*(a_0, b_0)$ y $a \to a^*$ cuando $t \to +\infty$. Los valores de equilibrio de b, c, d y el coportamiento de estas concentraciones se deduce directamente de (9).

Debe observarse que el equilibrio (a^*, b^*, c^*, d^*) depende de los datos iniciales a_0, b_0 pero el cociente c^*d^*/a^*b^* no. De hecho:

$$\frac{k_1}{k_{-1}} = \frac{c^*d^*}{a^*b^*},$$

y se llama a $K_{\text{eq}} = k_1/k_{-1}$ la constante de equilibrio de la reacción.

Se puede hacer un análisis similar para la reacción reversible más general:

$$mA + nB \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} rC + sD,$$

con problema de valor inicial asociado:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= m\{-k_1 a^m b^n + k_{-1} c^r d^s\} && a(0) = a_0 \\
\dot{b} &= n\{-k_1 a^m b^n + k_{-1} c^r d^s\} && b(0) = b_0 \\
\dot{c} &= r\{k_1 a^m b^n - k_{-1} c^r d^s\} && c(0) = 0 \\
\dot{d} &= s\{k_1 a^m b^n - k_{-1} c^r d^s\}, && d(0) = 0,
\end{aligned}$$

siendo la correspondiente constante de equilibrio:

$$K_{\text{eq}} = \frac{k_1}{k_{-1}} = \frac{(c^*)^r (d^*)^s}{(a^*)^m (b^*)^n}.$$

Autocatálisis. Consideremos la siguiente reacción elemental:

$$A + X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 2X.$$

En ésta, la sustancia X se combina con A para dar la propia X como producto en la reacción $\overset{k_1}{\rightarrow}$, mientras ella misma vuelve a liberar la X en la reacción inversa $\overset{k_{-1}}{\leftarrow}$. Se dice en este caso que X sufre un proceso de autocatálisis.

Para determinar la velocidad de prpoducción/consumo de x, $\dot{x}$ nótese que:

i) En la reacción $\overset{k_1}{\rightarrow}$, x se degrada con una tasa $k_1 ax$ mientras se produce a un ritmo de $2k_1 ax$ unidades de concentración por unidades de tiempo. La idea es pensar en:

$$A + X \overset{k_1}{\rightarrow} 2Y,$$

en la que claramente $-\dot{x} = 1/2\dot{y} = k_1 ax$, y tener en cuenta en la tasa de producción que Y es la propia X. El balance de la reacción directa es pues: $2k_1 ax - k_1 ax = k_1 ax$.

ii) En la inversa $\overset{k_{-1}}{\leftarrow}$, x se produce a un ritmo $k_{-1}x^2$, consumiéndose a razón de $2k_{-1}x^2$ u.c./u.tiempo. En efecto, considérese:

$$2Y \overset{k_{-1}}{\rightarrow} A + X,$$

donde $-1/2\dot{y} = \dot{x} = k_{-1}y^2$ y observar otra vez que Y es en realidad X. El balance es $k_{-1}x^2 - 2k_{-1}x^2 = -k_{-1}x^2$.

Por tanto, la ecuación para x es:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 a x - k_{-1} x^2,$$

que no es sino una variante de la ecuación logística. La correspondiente versión adimensional es:

$$\frac{du}{d\tau} = u - u^2,$$

$\tau = k_1 a t$, $u = (k_{-1}/k_1 a)x$.

En la formulación de mecanismos hipotéticos para explicar el metabolismo en organismos vivos es frecuente acoplar la autocatálisis de X con un proceso paralelo de consumo por medio de una reacción con otro producto B:

$$\begin{aligned} A + X &\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 2X \\ B + X &\xrightarrow{k_2} C. \end{aligned}$$

El segundo paso se denomina "degradación lineal de primer orden". Si el sistema trabaja en régimen abierto de suerte que las concentraciones de A y B permanecen constantes y se toman como parámetros. X se consume significativamente en un tiempo del orden de $t_d = \{k_2 b\}^{-1}$, siendo $t_c = \{k_1 a\}^{-1}$ el tiempo característico de formación en la reacción directa k_1. La ecuación diferencial es:

$$\frac{dx}{dt} = (k_1 a - k_2 b)x - k_{-1} x^2,$$

y resulta interesante la discusión de la dinámica de la reacción en términos de los valores del parámetro $\lambda = 1 - k_2 b/k_1 a = 1 - t_c/t_d$. En las escalas $\tau = k_1 a t$, $u = (k_{-1}/k_1 a)x$ la ecuación es:

$$u' = \lambda u - u^2.$$

Cuando $t_d \leq t_c$, $\lambda \leq 0$ y x se extingue cuando $t \to +\infty$. Si $t_c < t_d$ entonces x se estabiliza en torno al valor:

$$x^* = \frac{k_1 a}{k_{-1}}\lambda = \frac{k_1 a - k_2 b}{k_{-1}}.$$

En los ejercicios se describe una reacción teórica más elaborada que lugar a las ecuaciones de Lotka (sistema de Lotka-Volterra).

Ejercicios

Existecia y unicidad.

1. Demostrar que el problema de valor inicial $x' = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ admite una única solución. Hallarla. ¿Cuál es su intervalo maximal de existencia?

2. Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0\,. \end{cases}$$

Demuéstrese que el problema $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ carece de soluciones para $x \sim 0$.

3. Considérse $x' = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$ bajo la óptica de los teoremas de existencia y unicidad. ¿Qué hipótesis de los teoremas fundamentales no se satisface, a los efectos de unicidad? Resolver el problema numéricamente (con algún algoritmo básico. ¿Qué solución se obtiene?)
Nota. Usar el programa PHASER.

4. Demostrar que el problema $x' = x^{2/3}$, $x(0) = 0$, tiene infinitas soluciones en cada interval $[0, a]$.

5. Supongamos que f es continua, $f(u_0) = 0$, $f \neq 0$ para $0 < |u - u_0| < \delta$ y cierto $\delta > 0$. Sea además:

$$\int_{u_0}^{u_0 \pm \varepsilon} \frac{ds}{|f(s)|} < +\infty,$$

para $\varepsilon > 0$ pequeño. Pruébese que existen soluciones de $u' = f(u)$ que cortan a u_0 en tiempo finito.

6. Sea f contina, positiva en $u \geq M$ de suerte que:

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty.$$

Demuéstrese que todas las soluciones de $u' = f(u)$ explotan en tiempo finito.

Órbitas y equilibrios.

7. Describir de dos formas las órbitas y el espacio de fases de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales: primero hallando intervalos donde el campo tiene signo constante, segundo, usando una función de potencial.

a) $x' = -2x$	b) $x' = 1 + x$	c) $x' = x(1 - x)$
d) $x' = x - x^3 + 1$	e) $x' = x - x^3 + 0.2$	f) $x' = -x - x^3 + 1$
g) $x' = -x - x^3 + \lambda$	h) $x' = 2 \text{ sen } x$	i) $x' = 1 - 2 \text{ sen } x$
j) $x' = 1 - \text{ sen } x$	k) $x' = 2 - \text{ sen } x$	l) $x' = \tanh x$

y

$$\text{m) } x' = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \log |x| & x \neq 0\,. \end{cases}$$

8. Demostrar que si $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y la órbita positiva $\gamma^+(x_0)$ está acotada entonces $\beta_{x_0} = +\infty$. Procédase de manera similar con órbitas negativas.

9. Demostrar que si $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y la órbita positiva $\gamma^+(x_0)$ está acotada entonces $\omega(x_0)$ es un punto de equilibrio. Establecer y demostrar un resultado similar para órbitas negativas.

10. Determinar los puntos de equilibrio de las ecuaciones que siguen, calculando las correspondientes ecuaciones variacionales. Identificar los hiperbólicos y su tipo de esatbilidad.

a) $x' = 0$	b) $x' = 2.1x(1-x)$	c) $x' = 1 + x^2$
d) $x' = 1 - x^2$	e) $x' = 2x^2 - x^3$	f) $x' = x - x^3 + 0.2$
g) $x' = 2 \text{ sen } x$	h) $x' = 1 - 2 \text{ sen } x$	i) $x' = 1 - \text{ sen } x$
j) $x' = x \text{ sen } x$	k) $x' = a - x^3 \text{ sen } (1/x)$	l) $x' = x[1 - b(e^x - 1)]$

donde $a > 0$ en k), $b = -1.1, -1, -0.1, 0, 0.1$ en l).

11. ¿Es asintóticamente estable un punto de equilibrio que sea un mínimo relativo de la función de potencial?

12. Considérese la ecuación diferencial $x' = (1-x)x^{-1/2}$ en $x > 0$. ¿Cuál es el ω_--límite de una solución? ¿Alcanza una solución su ω_--límite en tiempo finito?

13. Es fácil ver que el espacio de fases de las ecuaciones $x' = -x$ y $x' = -x^3$ es el mismo (¡comprúebese!). Compárense, sin embargo las velocidades de convergencia a 0 de las soluciones de dichas ecuaciones. ¿En cuál de las ecuaciones es más rápida la convergencia?

Ecuaciones en la circunferencia.

14. Trazar el espacio de fases en la circunferencia, analizando la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones:

a) $x' = 2 \text{ sen } x$	b) $x' = 1 - 2 \text{ sen } x$	c) $x' = 1 - \text{ sen } x$
d) $x' = 1 - 2 \text{ sen } (x+1)$	e) $x' = \cos(2x) - \cos x + 1$	

Modelos.

15. Un tanque abierto recibe un caudal de k_1 litros/seg mientras hay una pérdida por evaporación a superficie libre, proporcinal a la potencia $2/3$ del volumen alojado. Formular y estudiar la ecuación para el volumen v.

16. Una gota esférica se evapora con una tasa proporcial a su superficie. Determinar el volumen en función del tiempo.

17. Un depósito cilíndrico de sección constante A recibe un caudal de k litros/seg mientras libera líquido por un agujero en el fondo de área A_h. Se sabe que la velocidad de las partículas fluidas al abandonar el depósito es proporcional a $\sqrt{h}$ donde h es la profundidad del depósito. Determinar el valor de equilibrio h_e de la profundidad.

18. La ecuación logística en dinámica de poblaciones:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}), \qquad (L)$$

describe la evolución de una especie que se autoregula en función de los recursos disponibles en el medio (N el número de individuos, r tasa de crecimiento intrínseco de la especie, K capacidad de "soporte" del medio).

a) Determinar las dimensiones de r y N.
b) Construir una versión adimensional de (L).
c) Resolver (L) y su versión adimensional. Comparar resultados.
d) ¿Por qué se dice que r^{-1} es el tiempo característico del modelo?. ¿Qué interpretación tiene?.

19. Una versión bidimensional de la ecuación logística es el siguiente modelo de competición de dos especies (de poblaciones N_1 y N_2) por el mismo recurso:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1 + b_{21}N_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \dfrac{b_{12}N_1 + N_2}{K_2}\right). \end{cases} \qquad (S)$$

a) ¿Qué comportamiento sigue cada especie en ausencia de ejemplares de la otra?. ¿Cuáles son las dimensiones de los parámetros r_i, K_i, b_{ij}? ¿Qué significado tienen b_{ij}?. Las especies consumen *el mismo recurso*. ¿Por qué entonces las capacidades del medio K_1 y K_2 son distintas para las especies? ¿Qué te sugiere que el "recurso" sea la hierba y que las dos especies en competición sean, por ejemplo elefantes y gacelas? ¿Cuál sería el valor relativo de las K_i en este caso?.
b) Probar que las soluciones con datos iniciales positivos son siempre positivas.
c) Determinar los posibles equilibrios y el campo de direcciones. Esbozar un posible comportamiento de las órbitas y su posible comportamiento asintótico. ¿Se observa que haya distintos regímenes de comportamiento en función de los parámetros del problema?.
d) Deducir una versión adimensional de (S). ¿Resulta más claro el análisis para dicha ecuación?.

Nota. Para el momento presente de la asignatura los apartados relevante son a), b) y d).

20. Una segunda variante en el plano de la ecuación logística es el modelo cooperativo o de simbiosis:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1 - b_{21}N_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \dfrac{N_2 - b_{12}N_1}{K_2}\right). \end{cases}$$

r_i, K_i, b_{ij} parámetros positivos; en el que las especies se benefician mutuamente de la presencia en el medio. Reprodúzcase el análisis del ejercicio anterior.

21. Hacia 1920 A. Lotka propuso el siguiente modelo "teórico" de reacción química capaz de exhibir "oscilaciones" en las concentraciones de los productos intermedios cuando reactivos y productos se suministran y retiran, respectivamente, del reactor a ritmo constante. En éste, A es el reactivo, P el producto final, X e Y son especies intermedias, las k_i son las constantes de la reacción:

$$\begin{aligned} A + X &\xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_3} P. \end{aligned}$$

a) Deducir las ecuaciones que describen las tasas de variación de las concentraciones $x = [X]$, $y = [Y]$ (ecuaciones de Lotka-Volterra).
b) Dar una versión adimensional de dichas ecuaciones.
c) Hacer un estudio del campo de direcciones, equilibrios y órbitas en el primer cuadrante.

Indicación. Las ecuaciones para las concentraciones de x e y son: $x' = k_1 a x - k_2 x y$, $y' = k_2 x y - k_3 y$.