Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 1

1. En el año 1225 Leonardo de Pisa estudió la ecuación

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

y obtuvo a $x = 1,368808107$ como raíz. Nadie sabe que método utilizó Leonardo para obtener este valor; pero es un resultado notable para su época.

(a) Aplique el método iterativo de punto fijo para obtener este resultado.

(b) Aplique el método de bisección a la ecuación de Leonardo.

(c) Aplique el método de Newton-Raphson a la ecuación de Leonardo.

Comparar los resultados obtenidos.

2. Demuestre que la fórmula para determinar raíces cuadradas

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{Q}{x_n}\right)$$

es un caso especial de la iteración de Newton-Raphson.

3. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxime, con un error menor que 10^{-4}, las raíces de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados:

$a)$ $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $I_1 = [1; 4]$. $b)$ $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $I_2 = [-4; 0]$.

$c)$ $x - \cos x = 0$, $I_3 = [0; \frac{\pi}{2}]$. $d)$ $x - 0,8 - 0,2\sin x = 0$, $I_4 = [0; \frac{\pi}{2}]$.

4. Repita el ejercicio anterior utilizando el método de la secante.

5. Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar, con 10^{-4} de precisión, el valor de x que produce el punto de la gráfica de $y = x^2$ más próximo a $P_o(1; 0)$.

6. Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar, con una exactitud de 10^{-4}, el valor de x que produce el punto de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ más cercano a $P_1(2; 1)$.

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 2

7. Encuentre una aproximación de la raíz de $x^3 - x - 1 = 0$ en $J = [1; 2]$, con una precisión de 10^{-5}.

   (a) Utilizando el método de bisección.

   (b) Utilizando el método de la secante.

   (c) Utilizando el método de Newton-Raphson.

   Compare los resultados obtenidos en a),b) y c).

8. Con $x_o = 2$, calcule una aproximación de $\sqrt[3]{3}$.

   (a) Utilizando el método de Newton-Raphson.

   (b) Utilizando el método de la secante.

   Con una precisión de 10^{-4}. Compare los resultados obtenidos.

9. Discutir el método de Newton-Raphson para la determinación de la raíz de la ecuación $3x^3 - 3x + 2\alpha = 0$, entre -1 y $-1 - \frac{\alpha}{3}$, donde $1 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{5}{3}}$.

10. Supongamos que existe una raí z simple s de $f(x) = 0$, en un intervalo I y además, que:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(y)}{f'(x)}\right| \leq m, \qquad \forall x;\ y \in I \qquad (f \in C^2(I)).$$

    Se intenta calcular un valor que aproxime a s por el método de Newton-Raphson,

    (a) Utilice el desarrollo de Taylor de f en un entorno de s para acotar

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - s|$$

    en función de e_o, m y n.

    (b) Exprese una condición para e_o de modo que si se cumple, entonces el método es convergente.

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 4. Análisis de los métodos más usuales

HOJA 3

11. Si se aplica el método de Newton a un polinomio

$$p(x) = a_o x^m + ... + a_m,$$

con un cero $\underline{\alpha}$ de multiplicidad $\underline{m}$.

(a) Mostrar la relación entre $e_{n+1} := x_{n+1} - \alpha$ y $e_n := x_n - \alpha$, para comprobar que la convergencia en este caso es lineal.

(b) Demostrar que, en este caso particular, si se aplica el método de Newton "modificado" (para el caso en que se tienen raíces de multiplicidad $\underline{m}$), es decir, usando la sucesión:

$$x_{n+1} := x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$

entonces la raíz se obtiene en un sólo paso.

(c) Probar que, a pesar de la modificación realizada, la convergencia del método sigue siendo cuadrática.

12. ¿Cómo debe elegirse la función $\underline{h}$ en la fórmula

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + h(x)\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2,$$

para que la iteración definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ converja a una raíz de $f(x) = 0$ con orden cúbico?

13. Existe una modificación del método de Newton que evita la evaluación de la función derivada y que se conoce como **Método de Steffenson**. Este método consiste en la utilización de la sucesión

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{D(x_n)}, \quad \text{con} \quad D(x_n) := \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

donde $f \in C'(A)$, siendo $A \subset \mathbb{R}$ tal que existe un único $\beta \in A$ que es raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Asumiendo que $f'(\beta) \neq 0$, demostrar que éste es un método iterativo de segundo orden (convergencia cuadrática).