Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 1

1. Escribir en forma estándar (aritmética del punto flotante) los siguientes números dados en base 10.

$$x = 1234 \quad ; \qquad x = 12.36 \quad ; \qquad x = .01287 \quad ; \qquad x = \frac{28}{3}$$

2. Sea $B \in I\!N\,;\ B \geq 2$ y $x = B(.a_1\ a_2\ a_3\ \ldots a_n\ \ldots)_B$ con

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

calcular x en base 10 . Aplicar el caso $B = 2$.

3. Convertir los siguientes decimales a sus equivalentes binarios ($B = 2$).

(a) $0,8125$ (b) $12,0625$ (c) $0,1$

(d) $0,2$ (e) $0,4$ (f) $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$

4. Convertir a su equivalente octal ($B = 8$), los siguientes números.

(a) $26,109375$ (b) $2^4\ (.101100101)_2$

5. Convertir los siguientes números a sus equivalentes decimales ($B = 10$).

(a) $(10101.101)_2$ (b) $(2A3.FF)_{16}$

(c) $(.1010101010...)_2$ (d) $(.AAAA...)_{16}$

(e) $(.00011001100110011...)_2$ (f) $(\underbrace{111\ldots1}_{n\text{-veces}})_2$

6. Sea $x \in I\!N\,;$ y sea $B \geq 2 : B \in I\!N$. Probar que $\exists N \in I\!N$:

$$x = B^N \sum_{j=1}^{N} a_j\ B^{-j} \quad ; \quad a_j \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ B-1\}$$

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 2

7. Convertir los siguientes enteros a sus equivalentes binarios ($B = 2$).

$$(a) \quad 49 \qquad (b) \quad 127 \qquad (c) \quad 129$$

8. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $B \in \mathbb{N}$; $B \geq 2$. Supongamos que $n = (a_1\ a_2 \ldots a_m)_B$. Probar que $n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$ es múltiplo de $B - 1$.

9. Convertir a su equivalente hexadecimal ($B = 16$), el número $231,7890625$ y dar la respuesta usando un redondeo a tres dígitos.

10. Representar los siguientes números usando **corte** o **redondeo** (según se indique), a la cantidad de dígitos que se señala en cada caso.

(i) $(.1010101010...)_2$ corte a 5 dígitos, (ii) $16^3\ (.2A3FF)_{16}$ redondeo a 3 dígitos,

(iii) $0,142857142857...$ corte a 4 dígitos, (iv) $(1011.00101)_2$ redondeo a 6 dí gitos.

11. Acotar x_E sabiendo que $x_A = 35,56$ es una aproximación con una magnitud del error absoluto menor que una centésima.

12. Determinar cual de las dos medidas siguientes tiene mayor precisión:

$$(a)\ \frac{6}{25} \cong 1.4 \quad \text{o} \quad \frac{1}{3} \cong 0.333\,, \quad (b)\ \frac{1}{9} \cong 0.1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{3} = 0.33\,, \quad (c)\ \frac{15}{7} \cong 2.14 \quad \text{o} \quad \frac{1}{9} \cong 0.11\,,$$

$$(d)\ \frac{6}{7} \cong 0.86 \quad \text{o} \quad \pi \cong \frac{22}{7}\,, \qquad (e)\ \pi \cong 3.142 \quad \text{o} \quad \sqrt{10} \cong 3.1623\,.$$

13. Acotar A sabiendo que $\tilde{A} = 43,56$ es aproximación con un error relativo a lo sumo del 1%.

14. Si $x_A = 1.414$ es una aproximación obtenida redondeando a tres decimales una cantidad x_E, indicar en qué intervalo está contenido el valor exacto.

15. Un voltímetro marca las lecturas con un error de 0,005 voltios. Se toma una lectura de 60 v . Calcular los errores absoluto, relativo y porcentaje del error.

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 3

16. Estimar el error absoluto de los siguientes números aproximados a partir de su error relativo:

    (a) $x_A = 2,52$ $\quad Rel(x_A) = 0.7\%$ $\quad$ (b) $y_A = 0.986$ $\quad Rel(y_a) = 0.1$

    (c) $z_A = 46.75$ $\quad Rel(z_a) = 1\%$ $\quad$ (d) $x_A = 199$ $\quad Rel(x_A) = 0.01.$

17. Hallar el error relativo de las siguientes aproximaciones considerando como valor verdadero el obtenido por una calculadora.

    (a) $\frac{1}{9} \approx 0,1$ $\quad$ (b) $\pi^2 \approx 9,87$

    (c) $\frac{25}{31} \approx 0,75$ $\quad$ (d) $25,657341 \approx 25,65$

18. Estimar el error relativo de las siguientes aproximaciones (x_A), sabiendo que la magnitud del error absoluto E_A está acotada por la cantidad indicada:

    (a) $x_A = 25,35 \quad ; \quad |E_A| \leq 1.2$ $\quad$ (b) $x_A = 47,453 \quad ; \quad |E_A| \leq 0,024$

    (c) $x_A = -3,2117210 \quad ; \quad |E_A| \leq 0,0037$ $\quad$ (d) $x_A = 0,0234 \quad ; \quad |E_A| \leq 0.01$

19. Encontrar el número de cifras significativas de las siguientes aproximaciones (x_A) a los valores exactos (x_E):

    (a) $x_A = 451,023 \quad x_E = 451.01$ $\quad$ (b) $x_A = -0,045113 \quad x_E = -0,04518$

    (c) $x_A = 0,333 \quad x_E = \frac{1}{3}$ $\quad$ (d) $x_A = 3,1416 \quad x_E = \pi$

    (e) $x_A = 0,0067 \quad x_E = e^{-5}$ $\quad$ (f) $x_A = -25,607 \quad x_E = -25,60653.$

20. Encontrar el número de cifras significativas de las siguientes aproximaciones (x_A) a los valores exactos (x_E):

    (a) $x_A = 0.101 \quad x_E = 0.099$ $\quad$ (b) $x_A = 0,099 \quad x_E = 0,101$

    (c) $x_A = 1,033 \quad x_E = 0,99$ $\quad$ (d) $x_A = .9869 \cdot 10 \quad x_E = \pi^2$

    (e) $x_A = -0,0094 \quad x_E = -0,01$ $\quad$ (f) $x_A = -0.01 \quad x_E = -0.0094.$

21. Dar cotas de los errores absolutos y relativos de los siguientes números aproximados, si todos los dígitos son significativos:

    (a) $a = 0,7538$ $\quad$ (b) $b = -17,354$ $\quad$ (c) $c = 0,00043$

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 4

22. Determinar el número de cifras significativas que posee el conjunto de números de máquina.

23. Determinar la cantidad de cifras significativas que tiene el número $x = 2.3752$ si el error relativo del mismo es de 0.01.

24. Sabiendo que $\hat{A} = 14,273$ es una aproximación de A con una cota del error relativo del orden de $5 \cdot 10^{-3}$, se pide:

    (a) Estimar entre que valores está A.

    (b) Estimar el error absoluto.

    (c) ¿ Es posible obtener una aproximación de A con dos cifras significativas ?. Justifica la respuesta.

    (d) Acotar el error relativo y absoluto de A^2

25. Sabiendo que $\hat{A} = 1,7342$ es una aproximeción con una fiabilidad menor de una diez milésima, se pide:

    (a) Acotar el error absoluto.

    (b) Intervalo donde se escuentra A.

    (c) Encontrar las cifras significativas de $\hat{A}$.

26. Si se sabe que un número A se encuentra en el intervalo [23.07, 23.10], escoger una aproximación y estimar el error absoluto. Calcular el error relativo.

27. Encontrar las cifras significativas de $a = 705,1978$ sabiendo que el error absoluto está acotado por $0,3$. Redondear hasta dejar sólo cifras significativas.

28. ¿ Cuántos dígitos deben tomarse en el cálculo de $x = \sqrt{20}$ de forma que el error relativo de la aproximación obtenida no exceda de 0.001?.

29. ¿ Cuántos dígitos son necesarios tomar en cada uno de los factores para que $\sqrt{3} \cdot \pi$ se obtenga con un error de 1 milésima?.

30. ¿ Cuántos dígitos deben tomarse en los factores de la operación $\frac{7}{9}$ para que su error relativo en la aproximación obtenida no exceda de 0.03% ?.

31. Si a posee n cifras significativas, cuantas tiene $\dfrac{a}{10}$.

32. Demostrar que $Rel(K \cdot x_A) = Rel(x_A)$.

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 5

33. Calcúlese $Rel\,(\sqrt{x_A})$ en función de $Rel\,(x_A)$.

34. Hacer exactamente lo mismo que en el apartado anterior pero con $Rel(\sqrt[m]{x_A})$.

35. El lado de un cuadrado mide $l = 36.5cm$ con un error de $1mm$. Estimar el área del cuadrado, su error absoluto, error relativo y el número de cifras significativas.

36. Estimar la longitud del lado de un cuadrado que mide 16.45 cm^2 aproximadamente con una precisión de 0,01 cm.

37. Calcular el error relativo de la siguiente operación: $P = \frac{A \cdot B}{C}$ si, $A = 3.1528 \pm 0.004$, $B = 3142.7 \pm 0.4$, $C = 15 \pm 0.003$.

38. Calcular el error relativo de la siuiente operación: $P = \sqrt[5]{\frac{AB}{C}}$, si $A = 32.15 \pm 0.008$, $B = 15.2373 \pm 0.007$, $C = 47.20 \pm 0$.

39. Calcular el valor numérico de los siguientes cocientes. En el resultado, retener todas las c.s.v. y un digito más de reserva. Todos los números tienen sus digitos válidos.

    (a) $y = \dfrac{3.07 \cdot 326}{36.4 \cdot 323}$, (b) $y = \dfrac{36.245 \cdot 85}{975 \cdot 642}$, (c) $y = \dfrac{37.2 + 458.67}{36.5 \cdot 246}$, (d) $y = \dfrac{96.891 - 4.25}{33.3 + 0.426}$.

40. Calcular con cuántas cifras hay que tomar π y e en $R = \frac{\pi e}{1.4142}$ para obtener el resultado con error absoluto menor que una centésima si el valor aproximado del denominador tiene todas sus cifras válidas. Dar R sólo con c.v. y un dígito más de reserva.

41. Calcular con cuántas cifras válidas hay que tomar π y e para obtener $\sqrt{\frac{\pi \cdot e}{\pi + e}}$ con error absoluto menor que una milésima.

42. El período de oscilación de un péndulo de longitud l es igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

    donde g es la aceleración de la gravedad. ¿ Con qué precisión debe medirse la longitud de un péndulo, cuyo período de oscilación es, aproximadamente, de 2 seg, para conocer este período de oscilación con un error relativo del 0.5%? ?'Con qué exactitud deben tomarse los valores de π y de g? AYUDA: Despejar el valor de l que hace $T = 2$.

Métodos Numéricos I

Curso 2001-2002

Colección de Problemas

Capítulo 2. Aritmética del Computador

HOJA 6

43. Hallar las raices de la ecuación $x^2 - 40x + 1 = 0$, usando la aproximación $\sqrt{399} = 19.975$ correctamente redondeada. ¿ Cuántos dígitos significativos tiene cada una ? ¿ Cómo se puede evitar la pérdida de significancia ?

44. Usando el polinomio de Taylor como aproximación a las siguientes funciones intenta evitar la pérdida de significancia en la evaluación de las siguientes funciones cerca del cero, comprobando dicha pérdida suponiendo que disponemos de una calculadora que sólo trabaja con 5 dígitos significativos :

$$a)\ \ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \qquad\qquad b)\ \ \frac{\ln(1-x) + xe^{\frac{x}{2}}}{x^3}.$$

En ambos casos, ¿ Qué ocurre con $\lim_{x \to 0} f(x)$?.

45. Suponiendo que tenemos una calculadora que sólo puede trabajar con cuatro dígitos significativos, evaluar los siguientes polinomios cuando x toma valores próximos a 1 y estudia su comportamiento:

(a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

(b) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

¿ Qué ocurre en esos puntos con $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$?.

46. Si suponemos que tenemos la misma calculadora que en el problema anterior, estudiar la pérdida de significancia al evaluar las siguientes funciones en los puntos que se indican. Además, buscar alguna forma alternativa de evaluarlas para evitar la pérdida:

(a) $\ln(x+1) - \ln(x)$, para x grande .

(b) $\dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$, x próximos al 0.

(c) $\sqrt[3]{1+x} - 1$, x próximos al 0 .

47. Acotar el error relativo del número $x_A = 0,937$, asumiendo que tiene tres dígitos significativos con respecto a x_E. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, acotar los errores absoluto y relativo al aproximar $f(x_E)$ por $f(x_A)$.