Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones de Bessel

1. Demostar las siguientes propiedades de las funciones de Bessel de primera especie

   - $\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$
   - $\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$
   - $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$
   - $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x)$
   - $(\frac{d}{xdx})^{m}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x)$
   - $(\frac{d}{xdx})^{m}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = (-1)^{m}x^{-(\nu+m)}J_{\nu+m}(x)$

2. Demostar las siguientes propiedades de las funciones de Bessel de segunda especie

   - $\frac{d}{dx}[x^{\nu}Y_{\nu}(x)] = x^{\nu}Y_{\nu-1}(x)$
   - $\frac{d}{dx}[x^{-\nu}Y_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)$
   - $Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Y_{\nu}(x)$
   - $Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y'_{\nu}(x)$
   - $Y_{-n}(x) = (-1)^{n}Y_{n}(x)$

3. Demostrar que para todo $n = 0, 1, 2, ...$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}x^{n+\frac{1}{2}}(\frac{d}{xdx})^{n}[\frac{sen\ x}{x}]$$

4. Demostrar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}t^{2k}(1-t^{2})^{\nu-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} \quad (\nu > \frac{-1}{2})$$

5. Haciendo uso de la igualdad anterior, deducir la siguiente representación integral de las funciones de Bessel de primera especie

$$J_{\nu}(x) = \frac{(\frac{x}{2})^{\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^{2})^{\nu-\frac{1}{2}}cos(xt)dt \quad (\nu > \frac{-1}{2})$$