Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones de Bessel - Ejercicios

1. Demostrar la siguiente igualdad

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi sen^{2\nu}\theta\, cos(xcos\,\theta)d\theta \quad (\nu > \frac{-1}{2})$$

Demostrar que además en el caso $\nu = 0$ también se puede escribir

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(xsen\,\theta)d\theta$$

hacer uso de ésta y de la igualdad

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ad\theta}{a^2+b^2sen^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0,\ b>0)$$

para demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0,\ b>0)$$

2. Demostrar que para $\mu+\nu > -1$, se verifica que

$$\int_0^x t^\mu J_\nu(t)dt = x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)\int_0^x t^{\mu-1}J_{\nu+1}(t)dt$$

3. Si denotamos por $j_{\nu,1},\ j_{\nu,2},\ ....$ los ceros positivos de $J_\nu(x)$ ordenados de forma creciente, demostrar que si $\nu > -1$,

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < .....$$

Indicación: Domostar haciendo uso del teorema de Rolle que entre dos ceros consecutivos de $x^{-\nu}J_\nu(x)$ hay al menos un cero de $x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ y que entre dos ceros consecutivos de $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ hay al menos un cero de $x^{\nu+1}J_\nu(x)$.