Funciones especiales - Facultad de Matemáticas

Funciones Elementales-Ejercicios

1. Una función f, continua en el eje real positivo, tiene la propiedad de que cualquiera que sean $x > 0$ e $y > 0$, la integral

$$\int_x^{xy} f(t)dt$$

es independiente de x (y por tanto sólo depende de y). Si $f(2) = 2$, calcular el valor de la integral $A(x) = \int_1^x f(t)dt$ para todo $x > 0$. **(solución:** $A(x) = 4ln\ x$**).**

2. Si $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo x e y y si $f(x) = 1 + xg(x)$ donde $g(x) \to 1$ cuando $x \to 0$ demostrar que **a)** f'(x) existe para cada x, y **b)** $f(x) = e^x$.

3. Dada una función g que tiene una derivada g'(x) para cada real x y que satisface las siguientes ecuaciones:

$$g'(0) = 2 \ \ y \ \ g(x + y) = e^y g(x) + e^x g(y) \ \ \textit{para todo x y todo y}$$

a) Probar que $g(2x) = 2e^x g(x)$ y encontrar una fórmula análoga para g(3x).

b) generalizar a) para dar una fórmula que relacione g(nx) con g(x) válida para todo entero positivo n. Probar el resultado por inducción.

c) Probar que $g(0) = 0$ y hallar el límite de $\dfrac{g(h)}{h}$ cuando $h \to 0$.

d) Existe una constante C tal que $g'(x) = g(x) + Ce^x$ para todo x. Demostrarlo y hallar el valor de C. [Indicación: aplicar la definición de la derivada de g'(x)].