Problemas del Tema 4.

1. Consideremos la ecuación lineal de segundo orden:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = \lambda S(x)y \ .$$

Buscando un factor integrante, demostrar que es posible escribirla en forma autoadjunta.

2. Escribir las siguientes ecuaciones en forma autoadjunta.

   (a) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (ecuación de Hermite).
   (b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (ecuación de Bessel).
   (c) $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ (ecuación de Laguerre).
   (d) $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ (ecuación de Tchebyshev).

3. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el operador

$$L[y] = y'' - h(x)y \ ,$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(a) + 2y(b) + y'(b) = 0 \\ 2y(a) - y(b) - y'(a) - y'(b) = 0 \ . \end{cases}$$

¿Se satisface la identidad de Green para el operador L con estas condiciones? ¿Y con las condiciones

$$\begin{cases} y(a) + y'(b) = 0 \\ y(b) + y'(a) = 0 \ ? \end{cases}$$

4. Sea el problema

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + \dfrac{1}{4}y = f(x) \\ \\ y(1) = y(e) = 0 \ . \end{cases}$$

Estúdiese si es autoadjunto. Calcúlense los autovalores y autofunciones del problema. Determínese la solución para $f(x) = x^{-1/2}$ en forma de serie.

5. Calcular los autovalores y autofunciones del siguiente problema

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \ . \end{cases}$$

6. Calcular los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \ . \end{cases}$$

¿Respecto a qué función peso son ortogonales las autofunciones?

7. Supongamos ϕ es una autofunción asociada al autovalor λ del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda m(x)y \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \ , \end{cases}$$

donde $p \in C^1[0,1]$, $q, m \in C[0,1]$, $p, m > 0$ y $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = 1, 2$. Demostrar que

$$\lambda \int_0^1 m(x)\phi(x)^2 dx = \int_0^1 (p(x)\phi'(x)^2 + q(x)\phi(x)^2)dx + \frac{\alpha_2}{\beta_2} p(1)\phi(1)^2 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} p(0)\phi(0)^2 \ ,$$

siempre que $\beta_1, \beta_2 \neq 0$. ¿Cómo debe modificarse esta igualdad si $\beta_1 = 0$ ó $\beta_2 = 0$? Demostrar a partir de aquí que si $q(x) \geq 0$, $\alpha_2/\beta_2 \geq 0$ y $\alpha_1/\beta_1 \leq 0$, entonces $\lambda \geq 0$. Además, $\lambda > 0$, a menos que $q(x) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

8. Definimos los polinomios $p_0(x),\ p_1(x), \ldots$ exigiendo que p_n sea un polinomio mónico de grado n, y que $p_0(x),\ p_1(x), \ldots$ sean ortogonales respecto a la función peso $\rho(x) = 1$ en $(0,1)$. Calcular estos polinomios.

9. Definimos los polinomios $T_0(x),\ T_1(x), \ldots$ por medio de las propiedades siguientes: son ortogonales respecto a la función peso $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ en el intervalo $(-1,1)$, T_n es de grado n y $T_n(1) = 1$. Demostrar que estas condiciones determinan los T_n, y comprobar que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \ .$$

Los polinomios $\{T_n\}$ se llaman de Tchebyshev.

10. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para series: si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de términos reales, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2} \ .$$

11. Sea $f(x) = |x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Elegir los coeficientes en:

$$f_2(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \text{sen } x + a_2 \cos 2x + b_2 \text{sen } 2x,$$

para minimizar el error $|f - f_2|_{L^2}$.

12. Se considera la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } (n!x)}{n^2} \ .$$

Demostrar que $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Si se considera la serie derivada término a término, ¿converge en L^2 a alguna función?

13. Hállense las series de Fourier de $e^x, x, \text{sen}^3 x$ en $(-\pi, \pi)$. Calcular la suma de la serie de Fourier de e^x en $x = \pi$.

14. En cada uno de los problemas siguientes, hallar la serie de Fourier de la función dada.

    (a)
    $$f(x) = x, \ -l \leq x < l \ .$$

    (b)
    $$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \ . \end{cases}$$

    (c)
    $$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \ . \end{cases}$$

15. Desarrollar en serie de Fourier de senos y de cosenos las funciones del ejercicio anterior.

16. Usando la serie de Fourier de la onda cuadrada
    $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \ , \end{cases}$$
    demostrar que
    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

17. Utilícese la identidad de Parseval para demostrar que
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$
    Indicación: Desarróllese en serie de senos la función $f(x) = 1$.

18. Seguir el mismo método que en el problema anterior para probar que
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

19. Usar series de Fourier y la función $f(x) = x^2$ para determinar la suma de la serie:
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

20. Si se supone que
    $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen } (nx)\right) \ ,$$
    demostrar formalmente la ecuación de Parseval:
    $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ .$$

21. Sea $f \in C^k(\mathbb{R})$ 2π-periódica, y $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sus coeficientes del desarrollo en serie de Fourier trigonométrica. Demostrar que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{n^k},\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Por tanto, se puede decir que la mayor regularidad de la función se traduce en un mayor decaimiento de sus coeficientes de Fourier.

22. *(Lema de Riemann-Lebesgue)* Demostrar que para cada $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen }(kx)dx = 0\ ,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0\ .$$

Indicación. Usar que $\{\cos(kx), \text{sen }(kx)\}$ es una base de Hilbert de $L^2(-\pi, \pi)$, y que $L^2(-\pi, \pi)$ es denso en $L^1(-\pi, \pi)$.

23. Sea $f \in L^2(T, \mathbb{C})$ compleja, siendo $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Determínense cuáles han de ser los coeficientes complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ para que:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

en $L^2(T, \mathbb{C})$. Pruése que si $f \in L^2(T, \mathbb{C})$ y usamos tales c_n la serie converge en $L^2(T, \mathbb{C})$ a una función $\tilde{f} \in L^2(T, \mathbb{C})$ que cumple:

$$|\tilde{f}|_2 \leq |f|_2.$$

24. Hállense, por separación de variables, las soluciones de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ bajo las condiciones que se indican:

(a) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \text{sen }^3 x$, $x \in (0,\pi)$.

(b) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \text{sen } x$, $x \in (0,\pi)$.

(c) $u(a,t) = u(b,t) = 0$, $u(x,0) = (x-a)(b-x)$, $x \in (a,b)$.

25. Estúdiese por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

26. Se considera el problema de Dirichlet para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

para f de clase C^2 y g de clase C^1 en $[0,l]$, satisfaciendo las correspondientes condiciones de compatibilidad. Pruébese que la solución puede representarse en la forma,

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+b_n\text{sen }\frac{n\pi c}{l}t\right)\text{sen }\frac{n\pi}{l}x.$$

La misma cuestión relativa al problema de Neumann y la expresión

$$u=a_0+b_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+b_n\text{sen }\frac{n\pi c}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

¿Cuándo es $b_0=0$ y qué implica ello sobre la solución del problema?

27. Estúdiese el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases}-X''=\lambda X, & 0<x<l\\ -X'(0)+a_0X(0)=0\\ X'(l)+a_lX(l)=0\ .\end{cases}$$

Apróvechese la información para construir expresiones formales – como desarrollos en serie de autofunciones – de los problemas de contorno y valor inicial

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx} & 0<x<\pi, t>0\\ u(x,0)=f(x) & 0\le x\le\pi\\ u_t(x,0)=0 & 0\le x\le\pi\\ -u_x(0,t)+a_0u(0,t)=0, & t\ge 0,\\ u_x(l,t)+a_lu(l,t)=0 & t\ge 0,\end{cases}$$

así como:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx} & 0<x<\pi, t>0\\ u(x,0)=f(x) & 0\le x\le\pi\\ -u_x(0,t)+a_0u(0,t)=0, & t\ge 0,\\ u_x(l,t)+a_lu(l,t)=0 & t\ge 0.\end{cases}$$

28. Se considera el problema de Dirichlet y valor inicial para la ecuación de ondas con amortiguamiento:

$$\begin{cases}u_{tt}+2au_t=c^2u_{xx} & 0<x<\pi, t>0\\ u(x,0)=f(x) & 0\le x\le\pi\\ u_t(x,0)=0 & 0\le x\le\pi\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t\ge 0,\end{cases}$$

donde a, c son constantes positivas. Supóngase que $f\in C^3$ en $[0,\pi]$ y que satisface las correspondientes condiciones de compatibilidad. Constrúyase una solución en forma de serie por el método de separación de variables.

29. En el espacio se considera el recinto esférico $0<a<r<b$, $r^2=x^2+y^2+z^2$. Hállense las soluciones de los problemas:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & a<r<b\\ u(a)=A, & u(b)=B,\end{cases}\qquad\begin{cases}\Delta u=f, & a<r<b\\ u(a)=A, & u(b)=B,\end{cases}$$

siendo f una función radial y continua.

30. En el recinto esférico $0 < a < r < b$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, se considera el problema $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 1$, bajo condiciones de contorno $u = 0$ en $r = a$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $r = b$. Hállese su solución. ¿Se podría resolver explícitamente el problema reemplazando la unidad en el segundo miembro por una función continua y radial arbitraria $f(r)$?

31. Analícese, bajo condiciones adecuadas, la solución del problema de contorno y valor inicial (ecuación de los telegrafistas):

$$\begin{cases} u_{tt} + 2au_t + bu = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

32. Demúestrese que la ecuación:

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

admite soluciones en la forma $X(x)Y(y)$.

Indicación: hállese una expresión para Y''/Y que debe derivarse con respecto a x.