Problemas del Tema 3.

En los problemas que siguen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ son multiíndices mientras que $x, y \in \mathbb{R}^n$ son vectores.

1. *(Teorema Binomial)* Demuéstrese que:
$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} x^\beta y^\gamma.$$

2. *(Desarrollo de Taylor para un polinomio)* Sea $f(x)$ un polinomio de grado m, $x \in \mathbb{R}^n$, pruébese que:
$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(0)) x^\alpha.$$

3. *(Teorema Multinomial)* Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pruébese que:
$$(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$

4. *(Teorema de Leibnitz)* Para f y g suficientemente regulares pruébese que:
$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta f \partial^\gamma g.$$

5. Demuéstrese que para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene:
$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

6. Prúebese que $\partial^\beta x^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)! x^{\alpha-\beta}}$ si $\alpha \geq \beta$ y $\partial^\beta x^\alpha = 0$ en otro caso.

7. Sea p un número real positivo. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-p}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
es C^∞, pero no es analítica real en $x = 0$.

8. Sean f, g analíticas reales en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el origen, con sendas series de potencias que convergen en $|x_1| < r,\ |x_2| < r, \ldots, |x_n| < r$. Supongamos que g es una mayorante de f. Demostrar que

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq g(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \ .$$

9. Definimos f en $|x| < 1$, mediante la fórmula

$$f(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \ ,$$

donde $c > 0$ es una constante. Demuéstrese que f^2 está mayorada por f si c es suficientemente pequeña.

10. Sea $f = f(t, x)$ analítica real en un entorno de $(t, x) = (0, 0)$. Pruébese que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite una solución analítica en un entorno $\{|t| < \varepsilon\}$ de $t = 0$. En 1889, H. Poincaré elaboró una mejora del resultado precedente que establece la dependencia analítica con respecto a parámetros y datos iniciales. Más precisamente, supongamos que:

$$f = f(t, x, \lambda),$$

es analítica cuando $t \sim t_0$, $x \sim x_0$, $\lambda \sim \lambda_0$. Sea ahora

$$x = x(t, \tau, \xi, \lambda),$$

la solución (única y, según sabemos ya, analítica en $t \sim t_0$) del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Pruébese que $x = x(t, \tau, \xi, \lambda)$ es analítica en $(t, \tau, \xi, \lambda) \sim (t_0, t_0, x_0, \lambda_0)$ es decir, $x = x(t, \tau, \xi, \lambda)$ se puede describir mediante la serie de potencias:

$$x(t, \tau, \xi, \lambda) = \sum_{\alpha} c_\alpha (t - t_0)^{\alpha_1} (\tau - t_0)^{\alpha_2} (\xi - x_0)^{\alpha_3} (\lambda - \lambda_0)^{\alpha_4},$$

done $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, y donde la serie converge absolutamente en un cierto entorno de $(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)$ en $\mathbb{R}^4$.

11. Sean $a = a(s, u)$, $b(s, u)$ analíticas reales en un entorno de $(s, u) = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Demuéstrese que:

$$\begin{cases} u_t = a(s, u) u_s + b(s, u) \\ u(s, 0) = 0 \end{cases}$$

admite una solución analítica $u(s, t)$ definida en un entorno $\{|s|, |t| < \varepsilon\}$ de $(0, 0)$.

12. Sea $u(x,y)$ una solución de $\Delta u = 0$ expresada en coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\text{sen }\theta$. En el círculo unidad $r = 1$ tómense los datos de Cauchy:

$$u = f(\theta), \quad u_r = g(\theta),$$

donde f y g son reales analíticas y periódicas de periodo 2π. Demuéstrese que existe una solución analítia definida para todo θ real y $|r-1|$ suficientemente pequeño. Demuéstrese que si f y g son polinomios trigonométricos (e.d. de la forma $p(\cos\theta, \text{sen }\theta)$ con p un polinomio) entonces las soluciones existen en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Indicación: Utilícense soluciones especiales de la forma $e^{in\theta}r^{\pm n}$.

13. Hállese la solución analítica del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{ss} = 0 \\ u(s,0) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \\ u_t(s,0) = ke^{-k/2}\text{sen } ks \quad s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Indicación. Una forma alternativa es hallar soluciones en forma de producto $u(s,t) = S(s)T(t)$.

14. Calcular la solución analítica del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = \text{sen } t \\ u_x(0,t) = \cos t \ . \end{cases}$$

15. Calcular la solución analítica del problema

$$\begin{cases} (1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \\ u_t(x,0) = \text{sen } x \ . \end{cases}$$

16. Mediante un desarrollo en serie de potencias en y, encontrar la solución del problema

$$\begin{cases} u_{yy} = u_{xx} + u \\ u(x,0) = e^x \\ u_y(x,0) = 0 \ . \end{cases}$$