Problemas del Tema 2.

1. Hállense las soluciones de los siguientes problemas de Cauchy:
   a) $u_x + u_y = u^2$; $u(x,0) = h(x)$.
   b) $u_y = xuu_x$; $u(x,0) = x$.
   c) $xu_x + yu_y + u_z = u$; $u(x,y,0) = h(x,y)$.
   d) $xu_y - yu_x = u$; $u(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Dada la ecuación
$$(y-u)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial y} = u - x \ ,$$
hallar la superficie integral que pasa por la parábola $y = 1$, $u = x^2$.

3. Hallar la superficie integral de la ecuación
$$2u^4\frac{\partial u}{\partial x} + 5xy\frac{\partial u}{\partial y} = 5xu$$
que pasa por la curva $x = 0$, $4y + z^5 = 0$.

4. Una función $u(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se dice homogénea de grado $\alpha \neq 0$ si:
$$u(tx,ty) = t^\alpha u(x,y), \quad \forall t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{H}$$
Un resultado debido a Euler establece que $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ cumple (H) sii u satisface la e.d.p.:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{E}$$
Estúdiense las soluciones de (E) con las técnicas de las edp's de primer orden, imponiendo el dato $u(x,1) = h(x)$.

5. Calcular la edp de primer orden que satisfacen todas las funciones reales y radiales $u \in \mathbb{R}^2$. Estudiar el problema de Cauchy para la ecuación resultante.

6. Hállese la edp de primer orden que satisfacen las funciones $u = f(x^2 - y^2)$, para $f \in C^1(\mathbb{R})$. Estúdiese el problema de Cauchy correspondiente.

7. Se considera la ecuación
$$mu_x + nu_y - p = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
siendo m, n, p constantes. Hállese la solución con dato $u(x,0) = f(x)$, $f \in C^1$.

8. Hallar la ecuación en derivadas parciales que verifica la familia de superficies $\phi(xz^2, y) = 0$ (ϕ arbitraria), e integrarla.

9. *Superficies ortogonales.* Consideremos una familia uniparamétrica de superficies $\{\mathcal{S}_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definidas como $H(x, y, z, \lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruébese que una cierta superficie definida en $\mathbb{R}^3$ por $z = u(x, y)$, (H y u regulares) es ortogonal a la familia $\mathcal{S}_\lambda$ si:

$$H_x u_x + H_y u_y = H_z,$$

siempre que $z = u(x, y)$. Hállese una familia ortogonal a la familia $\mathcal{S}_\lambda$ definida en la forma:

$$x^2 + y^2 = 2\lambda z.$$

Hállese asimismo una superficie ortogonal a todas las de la familia:

$$z(x + y) = \lambda(3z + 1),$$

que pase además por el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

10. Considérese la ecuación $au_x + bu_y = 0$ y la curva de datos $\mathcal{S} = \{(x, 0)/x \geq 0\}$. Para el dato $\phi = 0$ hállense valores de a y b y dos soluciones locales $(u, \mathcal{U})$ y $(u_1, \mathcal{U}_1)$ que no coincidan sobre $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1$.

11. Sea u una solución de

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = -u$$

de clase C^1 en $\overline{B}$, donde B es la bola unidad de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $a(x, y)x + b(x, y)y > 0$ en la frontera de B. Demostrar que $u \equiv 0$.

Indicación: Pruébese que $\max u \leq 0$, $\min u \geq 0$.

12. Se considera el problema de Cauchy:

$$u_t = u_x + u(1 - u); \quad u(x, 0) = \phi(x). \tag{P}$$

(a) Demostrar que la solución de (P) está definida en todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ si $\phi \in C^1$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) ¿Qué sucede si $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x_0) \notin [0, 1]$?

13. Se considera la edp:

$$u_x^2 + u_y^2 = u^2.$$

Estúdiense las soluciones de la ecuación característica. Hállense las soluciones de los problemas correspondientes a datos: $u(\cos s, \operatorname{sen} s) = 1$, $u(s, 0) = 1$.

14. Estúdiense los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} u_y = u_x^3 \\ u(x, 0) = 2x^{3/2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2). \end{cases}$$

15. Hállese la solución (o las soluciones) de los problemas de Cauchy:

    (a) $u_x u_y = u$, pasando por la curva Γ definida por: $x = 0$, $y^2 = z$.

    (b) $xu_x^2 + yu_y = u$, pasando por Γ dada por: $y = 1$, $x - z = 0$.

    (c) $u_x^2 - u_y^2 = u$, pasando por Γ: $4z + x^2 = 0$, $y = 0$.

    (d) $u_x^2 + u_y^2 = 1$, y Γ definida por: $y = 1$, $z^2 - x^2 = 1$.

    (e) $u_x u_y = u^2$, pasando por la curva $x = 1$, $uy = 1$.

16. Resuélvanse los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} u_x u_y + 1 - u = 0 \\ u = 2x + 1 \\ y = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x u_y - 3xy - 2u = 0 \\ u = 15y \\ x = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 - 4u = 0 \\ u = y^2 \\ x = 0. \end{cases}$$

17. Para F de clase C^2 demuéstrese que toda solución u de:

$$u_y = F(u_x), \quad u(x, 0) = h(x),$$

    se puede escribir como:

$$u = (F(p) - pF'(p))y + h(x + yF'(p)),$$

    donde p se expresa en términos de x e y mediante la relación:

$$p = h'(x + yF'(p)).$$

18. Se recuerda que una integral completa de la edp $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ es una familia biparamétrica de superficies integrales (soluciones) $z = u(x, y, \lambda, \mu)$. Pruébense los siguientes resultados.

    (a) (*Ecuación de Clairaut*). Si la ecuación tiene la forma $u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y)$ entonces $u = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta)$ es una integral completa.

    (b) Si la ecuación es de la forma $u_y = f(u_x)$, admite una integral completa de la forma $u = \lambda x + f(\lambda)y + \mu$.

    (c) Si la ecuación es de la forma $u_x = f(x, u_y)$ admite una integral completa de la forma: $u = \int_a^x f(s, \lambda)\, ds + \lambda y + \mu$.

    (d) Considérese la ecuación $u_x = f(u, u_y)$ y supóngase que la identidad $p = f(z, \lambda p)$ define a $p = P(\lambda, z)$. Pruébese que dicha ecuación admite una integral completa de la forma: $\int_a^u \frac{ds}{P(\lambda, s)} = x + \lambda y + \mu$.

19. Hállese una integral completa de las ecuaciones:

(a)	$p+q=pq$	(b)	$p^2z^2+q^2=1$
(c)	$zpq=p+q$	(d)	$qz=(p^2+q^2)y$
(e)	$zpq=p^2(p^2+xq)+q^2(q^2+yp)$	(f)	$c^2(p^2+q^2)=1$
(g)	$px^5-4q^3x^2+6x^2z=2$	(h)	$2(z+xp+pq)=yp^2.$

20. Mediante el método de la integral completa, resuélvanse los siguientes problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} u_x^2x+u_yy=u \\ y=1 \\ x+u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=u_xx+u_yy+\dfrac{1}{4}u_xu_y \\ y=0 \\ u=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xu_x+yu_y=u-\dfrac{1}{2} \\ u(x,0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

21. Una integral primera de un sistema

$$\begin{cases} x'=a(x,y,u) \\ y'=b(x,y,u) \\ u'=c(x,y,u) \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

es una función C^1 $V=V(x,y,u)$ que permanece constante sobre las soluciones de (S). Demostrar que el sistema (S) admite siempre dos integrales primeras V, W, independientes en el sentido de que

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial u} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} & \dfrac{\partial W}{\partial y} & \dfrac{\partial W}{\partial u} \end{pmatrix}=2\ .$$

22. Calcúlense dos integrales primeras independientes para las ecuaciones:

$$\begin{cases} x'=x(y-u) \\ y'=y(u-x) \\ u'=u(x-y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x^2(y^3-u^3) \\ y'=y^2(u^3-x^3) \\ u'=u^2(x^3-y^3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x^2 \\ y'=-y^2 \\ u'=(x-y)u. \end{cases}$$

23. Lo mismo que el problema anterior, para las ecuaciones:

$$\begin{cases} x'=x^2+1 \\ y'=-xy+u \\ u'=-xu+y \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=yu \\ y'=ux \\ u'=xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=cy-bu \\ y'=au-cx \\ u'=bx-ay. \end{cases}$$

24. Demostrar que si V, W son integrales primeras del sistema característico de la ecuación cuasi-lineal
$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)\ ,$$
entonces para cualquier función C^1 arbitraria F, tenemos que
$$F(V(x,y,u), W(x,y,u)) = 0$$
define una solución de la ecuación. Pruébese que toda solución de la ecuación cuasi-lineal puede escribirse de esta forma si las integrales primeras son independientes. Razónese cómo debe usarse este procedimiento para resolver el problema de Cauchy con dato $u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s)$.

25. Mediante el cálculo de dos integrales primeras independientes, resuélvase el problema de Cauchy para las siguientes ecuaciones:
    (a) $y + uu_y = 0$.
    (b) $uu_x = \sqrt{1-u^2}$, $u(x,x) = h(x)$.
    (c) $yu_x - xu_y = 0$, con gráfica $z = u(x,y)$, pasando por la curva $z = my, x^2 + (y-\alpha)^2 = R^2$.
    (d) $x^2u_x + y^2u_y = (x+y)u$.
    (e) $(2xy-1)u_x + (u-2x^2)u_y = 2(x-yu)$ pasando por la curva $y = 0, z = 1$.
    (f) $(x-y)u_x + (y-x-u)u_y = u$ pasando por la curva $z = 0, x^2 + y^2 = 1$.

26. Clasificar las siguientes ecuaciones, y escribirlas en forma canónica:
    (a) $\cos^2 x u_{xx} - 2y\cos x u_x y + y^2 u_{yy} = 0$.
    (b) $(1+t^2)u_{tt} + (1+x^2)u_{xx} + tu_t + xu_x = 0$.
    (c) $y^2u_{xx} - u_{yy} = 0$.
    (d) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$.
    (e) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$.
    (f) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$.
    (g) $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0$.
    (h) $\tan^2 x\ u_{xx} - 2y\tan x\ u_{xy} + y^2u_{yy} + \tan^3 x\ u_x = 0$.

27. Hallar las características de $(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} = 0$, y reducir la ecuación a forma canónica.

28. Transformar la ecuación
$$x^2u_{xx} = y^2u_{yy}$$
a forma canónica. Como consecuencia, probar que las soluciones son $u = f(xy) + xg(x/y)$, con f y g funciones regulares arbitrarias.

29. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, reduciéndolas a forma canónica:

    (a) $u_{xx} - 2\text{sen } x\ u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

    (b) $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0.$

    (c) $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $y < 0$.

    (d) $u_{xy} - \dfrac{2}{x-y}u_x + \dfrac{3}{x-y}u_y - \dfrac{3}{(x-y)^2}u = 0.$

    (e) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2yzu_{yz} + z^2u_{zz} + 2zxu_{zx} = 0.$

    (f) $u_{tt} = \alpha u_{xx} + 2\beta u_{xy} + \gamma u_{yy}$, con $\beta^2 = \alpha\gamma$.

30. Hallar la solución de la ecuación

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

    que cumple las condiciones $u(x,0) = 3x^2$, $u_y(x,0) = 0$.

31. Resolver la ecuación

$$(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} + xu_x - yu_y = 0$$

    con las condiciones adicionales $u(x,0) = \phi(x)$, $u_y(x,0) = \psi(x)$, ϕ, ψ funciones dadas.

32. Demostrar que la ecuación

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_{yy} = 0$$

    en $y < 0$ tiene una única solución que satisface las condiciones $u(x,0) = \tau(x)$, $|u_y(x,0)|$ acotada.

33. Encontrar la solución de la ecuación

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0,\ y < 0$$

    con $1/2 < \alpha < 1$, de tal forma que $u(x,x) = \tau(x)$ y

$$\lim_{y\to 0}(-y)^\alpha u_y(x,y) = \nu(x)\ .$$