CÁLCULO NUMÉRICO II– CURSO 2001/2002

Tema 2: Métodos de tipo Runge–Kutta. Series de Butcher. Condiciones de orden

1. Deducir la familia de métodos RK explícitos de 2 etapas y orden 2. Hallar el término principal del error local. Obtener aquel de la familia con TPEL mínimo.

2. Obtener las familias de métodos RK explícitos de 3 etapas y orden 3.

3. Probar que si un RK (A, b) explícito de $s \geq 4$ etapas tiene orden 4 entonces los vectores e, c, c^2, Ac son linealmente independientes.

4. Deducir que si un RK (A, b) explícito de 4 etapas tiene orden 4 entonces
$$b^T A = b^T - (b \cdot c)^T.$$

5. Del ejercicio anterior, deducir que si un RK (A, b) explícito de 4 etapas tiene orden 4 entonces $c_4 = 1$.

6. Demostrar que un RK explícito de 4 etapas tiene orden 4 si y sólo si
$$b^T e = 1, \quad b^T c = 1/2, \quad b^T c^2 = 1/3, \quad b^T c^3 = 1/4,$$
$$b^T A^2 c = 1/24, \quad b^T A = b^T - (b \cdot c)^T.$$

7. Determinar el orden y hallar el ELP de los métodos explícitos de Kutta (1905) y de la regla de los 3/8. ¿Cuál tiene un TPEL menor?

8. Suponiendo que tenemos un método RKE de 5 etapas y orden 5, demostrar:

   (a) $\{e, c, c^2, Ac, e_5\}$ son linealmente independientes ($e_5 = (0,0,0,0,1)^T$).
   (b) $(b^T A - b^T + (b \cdot c)^T)A = 0, \quad 2b^T A^2 - b^T A + b^T A \cdot c^T = 0.$
   (c) Lo anterior implica $c_4 = c_5 = 1$.

   Finalmente, demostrar que no existen métodos RKE de 5 etapas y orden 5. *Sugerencia:* obtener un absurdo hallando las condiciones de orden relativas a los dos árboles cuyas diferenciales elementales asociadas son $f'(f'(f'(f)))$ y $f''(f, f'(f'(f)))$.

9. Deducir las condiciones de orden 6 para métodos Runge–Kutta, calculando para ello todos los árboles de orden 6, junto con $\alpha(\tau), \gamma(\tau)$, y $\Phi(\tau)$.

10. Probar que todo RKE de s etapas tiene orden menor o igual a s.

11. Probar que un RKE de s etapas y orden s verifica
$$b_s a_{s,s-1} a_{s-1,s-2} \cdots a_{32} a_{21} \neq 0.$$

12. Demostrar que para métodos RKE de s etapas y orden s, con $a_{ij} \geq 0,\ b_i \geq 0,\ 1 \leq i, j \leq s$, la constante de Lipschitz $L_\Phi(h)$ de la función incremento Φ satisface
$$1 + hL_\Phi(h) \leq \exp(hL), \quad \forall\, 0 < h < \frac{1}{L\rho(|A|)},$$
donde L es la constante de Lipschitz de f en el dominio considerado.

13. Demostrar que para un RK de orden 5 se tiene

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j - \frac{c_i^2}{2} \right)^2 = 0,$$

por lo que no existe ningún método explícito de quinto orden con todos los $b_i > 0$.

14. Hallar las condiciones de orden p para métodos RK sobre sistemas lineales de coeficientes constantes.

15. Probar que para que un RK alcance orden 5 sobre ecuaciones escalares

$$y' = f(t, y), \quad y, f \in \mathbb{R},$$

se requieren menos condiciones que para alcanzar orden 5 sobre sistemas en general. Ver que, sin embargo, para alcanzar orden 4 se requiere el mismo número de condiciones.

16. Verificar que:

$$\operatorname{card}(LT_p) = (p-1)!$$

17. Considérese la siguiente generalización de métodos RKE de s etapas para PVIs $y' = f(t, y)$:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} \beta_i K_i,$$

$$K_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} K_j + p_{ii} f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} q_{ij} K_j), \quad i = 1, \ldots, s,$$

con $c_1 = 0$, $p_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, s$. Probar que este tipo de métodos es en realidad equivalente a cierto RK (A, b), calculando dicha matriz A y el vector b.