# CÁLCULO NUMÉRICO II– CURSO 2001/2002

## Tema 1: Problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias. Método de Euler. Consistencia, estabilidad y convergencia

1. Consideremos la integración del PVI
$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
mediante el método de Euler con paso fijo $h$.
   (a) Dar una expresión exacta del error final
   $$EF(T, h) = y(T) - y_n, \quad h = T/N.$$
   (b) Estudiar el límite
   $$\lim_{h \to 0^+} \frac{EF(T, h)}{h}$$
   y a partir de él, dar una estimación de $EF(T, h)$.
   (c) Aplicar lo anterior para los casos $\lambda = 1, -1$.
   (d) Para los dos PVIs anteriores, comparar los valores de $EF(T, h)$ dados por los apartados (a) y (b) con la cota dada por el teorema correspondiente. ¿Son realistas las acotaciones del error que da el teorema?

2. Dar una cota del error global del método de Euler al integrar con paso fijo $h$ un PVI en el intervalo $[0, T]$. Aplicarlo al PVI del problema anterior.

3. De los siguientes métodos, ¿cuáles son explícitos y cuáles implícitos? Obtener la función incremento de cada uno de ellos. Probar que los implícitos están bien definidos para tamaños de paso suficientemente cortos. ¿Cuáles son estables?
   (a) $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, (y_n + y_{n+1})/2)$.
   (b) $y_{n+1} = y_n + h/2\ (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$.
   (c) $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_n + h/2\, f(t_n, y_n))$.

4. Deducir que todos los métodos del problema anterior son consistentes de orden 2.

5. Siguiendo las ideas del problema anterior, obtener un método explícito de orden 3 al menos.

6. (a) Demostrar que la regla trapezoidal con paso $h$ se puede interpretar como el método de Euler explícito con paso $h/2$ seguido del Euler implícito con paso $h/2$.
   (b) Demostrar que la regla implícita del punto medio con paso $h$ se puede interpretar como el método de Euler implícito con paso $h/2$ seguido del Euler explícito con paso $h/2$.

7. Considérese la EDO
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad 0 \le t \le b, \quad \text{con } b \gg 1.$$
   (a) Aplicar la transformación de contracción $t = \tau b$ para obtener la EDO equivalente
   $$\frac{dz}{d\tau} = bf(\tau b, z), \quad 0 \le \tau \le 1.$$
   (b) Demostrar que aplicar cualquiera de los métodos que hemos visto en este tema a la EDO en $t$ con tamaño de paso $h = \Delta t$ es equivalente a aplicar el mismo método a la ODE en $\tau$ con paso $\Delta\tau$ verificando $\Delta t = b\Delta\tau$.