CÁLCULO NUMÉRICO II– CURSO 2001/2002

HERRAMIENTAS PARA LA ASIGNATURA

1 Teoremas de Taylor con resto integral

1. Sea $f : \Omega \subset I\!R \longrightarrow I\!R$, Ω convexo, $f \in C^{n+1}(\Omega)$, entonces, si $a, x \in \Omega$ se tiene

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

con

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

2. Sea $f : \Omega \subset I\!R \longrightarrow I\!R^p$, Ω convexo, $f \in C^{n+1}(\Omega)$, entonces, si $a, x \in \Omega$ se tiene

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

con

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt,$$

entendiéndose componente a componente, considerando

$$f^{(k)}(a) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(a) \\ \vdots \\ f_p^{(k)}(a) \end{pmatrix}, \quad k \geq 0.$$

3. Sea $f : \Omega \subset I\!R^m \longrightarrow I\!R$, Ω convexo, $f \in C^{n+1}(\Omega)$, entonces, si $a, x \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k) + \ldots \\ &+ \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \cdots (x_{i_n} - a_{i_n}) \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{m} \frac{\partial^{n+1} f(a + s(x-a))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{n+1}}}(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \cdots (x_{i_{n+1}} - a_{i_{n+1}}) ds. \end{aligned}$$

4. Sea $f : \Omega \subset I\!R^m \longrightarrow I\!R^p$, Ω convexo, $f \in C^{n+1}(\Omega)$, entonces, si $a, x \in \Omega$ se tiene para cada componente $f_k(x)$, $k = 1, \ldots, p$ de $f(x)$ que

$$\begin{aligned} f_k(x) &= f_k(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial^3 f_k(a)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k) + \ldots \\ &+ \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f_k(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \cdots (x_{i_n} - a_{i_n}) \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{m} \frac{\partial^{n+1} f_k(a + s(x-a))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{n+1}}}(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \cdots (x_{i_{n+1}} - a_{i_{n+1}}) ds. \end{aligned}$$

2 Teoremas del valor medio

1. Caso $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad \text{para cierto } \xi \in (a,b).$$

2. Caso $f : [a,b] \subset I\!R \longrightarrow I\!R^m$ continua y derivable, entonces
$$f_k(b) - f_k(a) = f_k'(\xi_k)(b-a), \quad \text{para ciertos } \xi_k \in (a,b), \quad k = 1, \ldots, m,$$
o, en forma vectorial
$$f(b) - f(a) = \bar{f}'(\xi)(b-a)$$
donde
$$\bar{f}'(\xi) = (f_1'(\xi_1), f_2'(\xi_2), \ldots, f_m'(\xi_m))^T.$$

3. Caso $f : \Omega \subset I\!R^m \longrightarrow I\!R$, Ω convexo y f continua y diferenciable, entonces para cualquiera dos puntos $z, z^* \in \Omega$:
$$f(z) - f(z^*) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial z}(z - z^*) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\xi)}{\partial z_i}(z_i - z_i^*),$$
donde ξ es un punto que pertenece al interior del segmento en Ω que une z y z^*.

4. Caso $f : \Omega \subset I\!R^m \longrightarrow I\!R^m$, Ω convexo y f continua y diferenciable, entonces para cualquiera dos puntos $z, z^* \in \Omega$:
$$f_k(z) - f_k(z^*) = \frac{\partial f_k(\xi_k)}{\partial z}(z - z^*) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k(\xi_k)}{\partial z_i}(z_i - z_i^*), \quad k = 1, \ldots, m,$$
donde los ξ_k son puntos que pertenecen al interior del segmento que une z y z^*. En forma vectorial
$$f(z) - f(z^*) = \bar{J}(\xi)(z - z^*)$$
donde
$$\bar{J}(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}(\xi_1) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}(\xi_1) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_m}(\xi_1) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}(\xi_2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2}(\xi_2) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_m}(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial z_1}(\xi_m) & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_2}(\xi_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_m}(\xi_m) \end{pmatrix}.$$

5. Caso $f : [0,T] \times \Omega \longrightarrow I\!R^m$, $\Omega \subset I\!R^m$ convexo, con f diferenciable y $\partial f / \partial y$ continua en $[0,T] \times \Omega$, entonces si consideramos para cada $(t,y), (t,z) \in [0,T] \times \Omega$, la función $\varphi(s) = f(t, y + s(z-y)),\ s \in [0,1]$, se tiene
$$f(t,z) - f(t,y) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + s(z-y)) \cdot (z-y)\, ds,$$
donde $\cdot$ denota el producto escalar en $I\!R^m$.

6. Teorema del valor medio generalizado para integrales:
Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow I\!R$, $f \in C[a,b]$, g integrable y no negativa (o no positiva) en $[a,b]$. Entonces
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx,$$
para cierto $\xi \in (a,b)$.

3 Teorema del punto fijo

Si $\varphi(z)$ verifica una condición de Lipschitz

$$\| \varphi(z) - \varphi(\bar{z}) \| \leq M \| z - \bar{z} \|$$

para todo $z, \bar{z}$, donde la constante de Lipschitz M verifica $0 \leq M < 1$, entonces existe una única solución α de la ecuación $z = \varphi(z)$. Además, si se define *la iteración de punto fijo*

$$z^{[\nu+1]} = \varphi(z^{[\nu]}), \quad \nu \geq 0, \quad z^{[0]} \text{ arbitrario},$$

se tiene que

$$z^{[\nu]} \to \alpha \ \text{ cuando } \ \nu \to \infty.$$

4 Fórmulas de cuadratura

Sirven para aproximar el valor de integrales definidas

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

mediante fórmulas del tipo

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}), \quad n \geq 1,$$

donde los $w_{j,n}$ se llaman *pesos de la fórmula de cuadratura* y los $x_{j,n}$ son los $n+1$ *nodos de integración*, que usualmente están en $[a, b]$.

Se dice que una fórmula de cuadratura $I_n(f)$ tiene *grado de precisión* (GP) m si $I_n(p) = I(p)$ para cualquier polinomio p de grado menor o igual a m e $I_n(p) \neq I(p)$ para algún polinomio p de grado $m+1$.

Si llamamos $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ al error de la fórmula, tenemos:

1. **Regla del punto medio.-** Sólo halla el valor de f en el punto medio de $[a, b]$:

$$I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad E_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad GP = 1.$$

2. **Regla trapezoidal.-** Se basa en aproximar $f(x)$ por la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)), \quad E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad GP = 1.$$

3. **Regla de Simpson.-** Se aproxima $I(f)$ por la integral del polinomio que interpola a f en a, $(a+b)/2$ y b:

$$I_2(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad GP = 3.$$

4. **Regla de los 3/8.-** Se aproxima $I(f)$ por la integral del polinomio que interpola a f en los cuatro puntos $x_j = a + jh, \ j = 0, 1, 2, 3$, con $h = (b-a)/3$:

$$I_3(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right], \quad E_3(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad GP = 3.$$

NOTA: todas estas reglas son casos particulares de las fórmulas de cuadratura de Newton–Cotes, que se basan en integrar los polinomios de interpolación de f.