REPASO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1 Problemas de valor inicial (PVIs)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma

$$y' = f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad f(t, y) : [0, T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

En general, la solución general de este sistema depende de m parámetros. La función $f(t, y)$ se llamará *función derivada*.

Cuando se fija una condición inicial

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

decimos que (**??**)-(**??**) constituyen un *problema de valor inicial o PVI.*

Es bien conocido que si $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^m)$, el PVI tiene al menos una solución, pero no es única necesariamente. Por ejemplo,

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0,$$

admite como soluciones $y = 0$ e $y = t^3/27$.

Naturalmente, las soluciones se buscan en el espacio de funciones vectoriales de clase $C^1([0, T])$. Para ello se exigirá, además de la continuidad de f, el que sea Lipschitz respecto de y. Denotando

$$\mathcal{D} := [0, T] \times \mathbb{R}^m,$$

en lo que sigue manejaremos las dos siguientes hipótesis:

(H1) $\exists L > 0 : \parallel f(t, y) - f(t, z) \parallel \leq L \parallel y - z \parallel, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0, T]$ (condición de Lipschitz respecto de y).

(H2) $f \in C(\mathcal{D})$.

Obsérvese que la norma elegida es indiferente. Además, no es necesario que el dominio de f en la componente y se extienda a todo $\mathbb{R}^m$, pero para simplificar la presentación de resultados lo supondremos así.

Teorema de existencia y unicidad:
*Consideremos el PVI (**??**)-(**??**), con f verificando* **(H1)** *y* **(H2)**. *Entonces:*

1. *Para todo $y_0 \in \mathbb{R}^m$, existe una única solución $y(t)$ del PVI en todo $[0, T]$. Además, esta solución es diferenciable.*

2. *La solución y depende continuamente de los datos iniciales, i.e., si $\hat{y}$ es otra solución de la EDO (**??**) con valor inicial $\hat{y}(0) = \hat{y}_0$, entonces*

$$\parallel y(t) - \hat{y}(t) \parallel \leq e^{Lt} \parallel y_0 - \hat{y}_0 \parallel, \quad \forall t \in [0, T].$$

3. *Si, de forma más general, $\hat{y}$ verifica la EDO perturbada*

$$\hat{y}' = f(t, \hat{y}) + r(t, \hat{y}), \quad \hat{y}(0) = \hat{y}_0,$$

con $\parallel r \parallel \leq M$ en $\mathcal{D}$, entonces

$$\parallel y(t) - \hat{y}(t) \parallel \leq e^{Lt} \parallel y_0 - \hat{y}_0 \parallel + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1), \quad \forall t \in [0, T].$$

Además, si f es diferenciable respecto de y, se puede tomar

$$L = \sup_{(t,y) \in \mathcal{D}} \parallel \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \parallel \quad \text{(matriz jacobiana de } f \text{ respecto de } y).$$

2 Estabilidad

El término *estabilidad* se ha usado tradicionalmente para designar muchos conceptos diferentes.

Idea básica: un modelo que da una solución (output) para unos datos iniciales dados (input) es *estable* si cuando dichos datos iniciales se perturban ligeramente, la solución también se perturba ligeramente. En caso contrario, se dice que el modelo es *inestable*.

Hay que distinguir entre la estabilidad de un problema y la estabilidad de los métodos numéricos que lo resuelven.

Incluso es diferente la estabilidad de un problema diferencial de valor inicial y la de un problema de valores frontera. Veamos un repaso sencillo de la estabilidad de los primeros.

2.1 Estabilidad de PVIs

Ejemplo más simple: la ecuación test

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Su solución exacta para $t \geq 0$ es

$$y(t) = e^{\lambda t} y(0).$$

Supongamos que $y(t)$ e $\hat{y}(t)$ son dos soluciones de la misma ecuación con dos valores iniciales distintos, $y(0) = y_0$ e $\hat{y}(0) = \hat{y}_0$. Entonces, calculando la diferencia:

$$|y(t) - \hat{y}(t)| = |e^{\lambda t}(y(0) - \hat{y}(0))| = |y_0 - \hat{y}_0| e^{Re\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Así, se tiene:

- Si $Re\lambda t \leq 0$: $e^{Re\lambda t} \leq 1$, y por tanto, $|y(t) - \hat{y}(t)|$ está acotada para todo $t \geq 0$. El problema (**??**) es *estable*.
- Si $Re\lambda t < 0$: $e^{Re\lambda t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, y por tanto, $|y(t) - \hat{y}(t)|$ decrece a medida que t aumenta. El problema (**??**) es *asintóticamente estable*.
- Si $Re\lambda t > 0$: $e^{Re\lambda t}$ crece sin límite cuando t aumenta. El problema (**??**) es *inestable*.

En general, para el PVI (**??**), se considera $t \geq 0$ y se dice que *una solución $y(t)$ es*:

- *Estable* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier otra solución $\hat{y}(t)$ de (**??**) que verifique

  $$\| y(0) - \hat{y}(0) \| \leq \delta,$$

  se tiene

  $$\| y(t) - \hat{y}(t) \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- *Asintóticamente estable* si, además de ser estable, se tiene

  $$\| y(t) - \hat{y}(t) \| \to 0 \ \text{ cuando } \ t \to 0.$$

- *Inestable* si no es estable.

Nota 1: cuando la función derivada f es lineal (respecto de y), o todas sus soluciones son estables o todas asintóticamente estables o todas inestables. Por eso, en los PVIs lineales, en vez de hablar de soluciones estables o no, se habla de problema estable o no. Cuando el PVI no es lineal, pueden haber soluciones estables y otras inestables, o sea, que la estabilidad depende de la solución elegida.

Nota 2: Hay un concepto más exacto de la estabilidad que aparece cuando, además de considerar perturbaciones en los valores iniciales del PVI, se consideran perturbaciones de la función derivada f. Pero no lo veremos aquí.

Vamos a aplicar este concepto de estabilidad a algunos casos especiales.

Sistemas lineales de coeficientes constantes:

$$y' = Ay, \quad A \in \mathcal{M}_{m\times m}, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Su solución exacta es

$$y(t) = e^{At}y(0), \quad t \geq 0.$$

En este caso, la estabilidad del problema depende de los autovalores de A $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$:

1. Si A es diagonalizable:
   (a) El problema es estable sii $Re(\lambda_i) \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.
   (b) El problema es asintóticamente estable sii $Re(\lambda_i) < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.
   (c) El problema es inestable sii existe un $i = 1, \ldots, m$ para el que $Re(\lambda_i) > 0$.
2. Si A no es diagonalizable:
   (a) El problema es estable sii todos los autovalores λ_i de A verifican que o bien $Re(\lambda_i) < 0$, o $Re(\lambda_i) = 0$ y λ_i es simple.
   (b) El problema es asintóticamente estable sii $Re(\lambda_i) < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.
   (c) El problema es inestable sii existe un $i = 1, \ldots, m$ para el que $Re(\lambda_i) > 0$ o $Re(\lambda_i) = 0$ y λ_i es múltiple.

Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de orden $\mathbf{k \geq 1}$:

$$a_0u^{(k)} + a_1u^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1}u' + a_ku = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_0 > 0, \quad u \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Esta ecuación de orden k se puede convertir en un sistema lineal de coeficientes constantes (**??**) con dimensión $m = k$, haciendo el cambio:

$$\begin{aligned} y_1 &= u \\ y_2 &= u' \\ y_3 &= u'' \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= u^{(k-2)} \\ y_k &= u^{(k-1)} \end{aligned}$$

con lo que obtiene la matriz A del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_k}{a_0} & -\dfrac{a_{k-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{k-2}}{a_0} & \ldots & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}.$$

Para calcular la estabilidad de este sistema, calculamos los autovalores de A usando el polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, obteniéndose que

$$p_A(\lambda) = \frac{(-1)^k}{a_0}p_k(\lambda)$$

donde $p_k(\lambda)$ es el polinomio característico de la ecuación de orden k (**??**), i.e.,

$$p_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^{k-j}.$$

Por tanto, la estabilidad de la ecuación (**??**) depende de las raíces de su polinomio característico, obteniéndose que:

- El problema (**??**) es estable sii todas las raíces λ del polinomio característico $p_k(\lambda)$ verifican que o bien $Re(\lambda) < 0$ o bien $Re(\lambda) = 0$ y λ es simple.
- El problema (**??**) es asintóticamente estable sii todas las raíces λ de $p_k(\lambda)$ verifican $Re(\lambda) < 0$.
- El problema (**??**) es inestable sii existe una raíz λ de $p_k(\lambda)$ con $Re(\lambda) > 0$ o alguna con $Re(\lambda) = 0$ pero múltiple.

Sistemas lineales de coeficientes variables:

$$y' = A(t)y + q(t), \quad A(t) \in \mathcal{M}_{m\times m}, \quad t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

Para resolver estos problemas se hace uso de la llamada *matriz fundamental* $Y(t)$, que es la matriz funcional de dimensión $m \times m$ que verifica

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = I, \quad 0 \le t \le T.$$

Con esto, tenemos que la solución de (**??**) sujeta a los valores iniciales dados

$$y(0) = c,$$

viene dada por

$$y(t) = Y(t)\left[c + \int_0^t Y^{-1}(s)q(s)ds\right].$$

Por tanto, si estudiamos la diferencia entre dos soluciones de la misma ecuación (**??**) con distintos valores iniciales, se tiene que:

- El problema (**??**) es estable sii
$$\sup_{0\le t<\infty} \| Y(t) \|$$
está acotado.
- El problema (**??**) es asintóticamente estable si, además de ser estable, se tiene que
$$\| Y(t) \| \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$
- El problema (**??**) es inestable si $\| Y(t) \|$ no está acotado cuando t aumenta.

Nota: La estabilidad de este tipo de problemas se diferencia bastante de la de los sistemas de coeficientes constantes. Por ejemplo:

$$y' = (\cos t)y,$$

tiene como solución fundamental $Y(t) = \exp(\text{sen } t)$, por lo que es estable ($\| Y(t) \| \le e, \ \forall t \ge 0$). Sin embargo, tiene el autovalor $\lambda(t) = \cos t$, que no siempre tiene parte real negativa.

Sistemas no lineales:

La diferencia fundamental entre la estabilidad de sistemas lineales y no lineales es que la estabilidad de estos últimos *depende de la solución particular considerada.*

Por ello se aplica el estudio de la estabilidad sólo *localmente*. Sea $y(t)$ es la solución única de (**??**) con $y(0) = c$, en algún tubo del tipo $\mathcal{T} = \{(t, y) \mid t \in [0, T], a \leq \| y \| \leq b\}$ (o sea, una solución local, pero que no ha de serlo en todo el dominio de la ecuación). Si consideramos otra solución local $\hat{y}(t)$ de la misma EDO con $\hat{y}(0) = \hat{c}$ no muy lejos de c, entonces, bajo ciertas condiciones, en el desarrollo de Taylor de f:

$$f(t, \hat{y}) = f(t, y) + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}(\hat{y} - y) + r(t, y, \hat{y}),$$

se puede ignorar el término no lineal $r(t, y, \hat{y})$ y considerar el *problema variacional lineal*

$$z' = A(t, y)z, \quad A(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y).$$

Obsérvese que A depende de y, no de z. Por tanto, la estabilidad de la solución local $y(t)$ dependerá de cómo quede este sistema variacional y cómo es su estabilidad lineal.

Ejemplo: A menudo se pide la estabilidad de las *soluciones estacionarias*, esto es, en los problemas en que $f(t, y) = f(y)$ independiente de t (autónomos), las soluciones que verifican $y' = f(y) = 0$. Consideremos el problema

$$y' = y(1 - y).$$

Claramente, este problema tiene como soluciones estacionarias a $y = 0$ e $y = 1$. En este caso $A = \partial f / \partial y = 1 - 2y$, con lo que el problema variacional $z' = (1 - 2y)z$ (para cada solución y conocida) es lineal de coeficientes constantes. Por tanto, su estabilidad dependerá del único autovalor de A (pues el problema es escalar), que es $\lambda(y) = 1 - 2y$. Así, para la solución estacionaria $y = 0$, se tiene $\lambda(0) > 0$, por lo que es inestable, mientras que la $y = 1$ es estable pues $\lambda(1) < 0$.

Evidentemente, el estudio global de la estabilidad de una ODE no lineal no es factible. Sólamente se suele hacer sobre soluciones estacionarias o, como mucho, sobre soluciones periódicas.