CÁLCULO FINITO

Curso 2000/2001

Tema 2: El cálculo en diferencia

1. Determinar las siguientes funciones:

a) $\Delta^3(t^2+t)^2$	*b)* $\Delta(3t^2+4t-6)$	*c)* $E^2\Delta(x^2a^x)$
d) $(\Delta+I)(x^3+2x-1)$	*e)* $\Delta^2E^3(x^3)$	*f)* $E\Delta^2(4t-t^2)$
g) $(2\Delta^2+\Delta-I)(t^3-3t^2+2t-1)$	*h)* $\Delta E(2t^2-5t-5)$	*i)* $E^3\Delta E(3t-t^4)$

2. Hallar:

a) $\Delta(3t^{(2)}+2t^{(3)}-4)$	*b)* $\Delta(4t^{(-2)}-5t^{(-1)})$	*c)* $\Delta^3(3t^{(-2)}-2t^{(2)}-5t^{(-1)})$
d) $\dfrac{\Delta}{\Delta t}(3t^{(4)})$	*e)* $\dfrac{\Delta}{\Delta t}(3t^{(4)}-5t^{(2)}+3t^{(1)})$	*f)* $\dfrac{\Delta}{\Delta t}(2t^{(2)}-4t^{(-2)})$
g) $\dfrac{\Delta^3}{(\Delta t)^3}(t^{(3)}-t^{(-1)})$	*h)* $\Delta(x^{(-2)}+x^{(-1)}+1+x^{(1)}+x^{(2)})$	*i)* $(\Delta+3E)(5t^{(3)})$

3. Demostrar:

$$a)\ \Delta(\text{tag } t) = \sec^2\ t\ \frac{\text{tag } h}{1-\text{tag } h \text{ tag } t}.$$

$$b)\ \Delta(\sec(\pi t)) = -2\sec(\pi t) \quad (\text{ con } h=1)$$

$$c)\ \Delta(\text{arcsen}(x)) = \text{arcsen}\left((x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right)$$

$$d)\ \Delta(\arccos(x)) = \arccos\left(x(x+h) + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x+h)^2}\right)$$

$$e)\ \Delta\text{cotag}(2^k\theta) = \text{cosec}(2^{k+1}\theta), \quad (h=1).$$

$$f)\ \frac{\Delta}{\Delta t}(pt+q)^{(m)} = mp(pt+q)^{(m-1)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4. Demostrar

$$a)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\text{arctag}(x))}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$b);\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta}{\Delta x}(\cos rx) = -r \text{ sen } rx.$$

5. Hallar

a) $D(x^5-2x^3-x^1)$	*b)* $D(x^{(5)}-2x^{(3)}-x^{(1)})$
c) $\Delta(x^5-2x^3-x^1)$	*d)* $\Delta(x^{(5)}-2x^{(3)}-x^{(1)})$
e) $D^2(x^{(-3)}-x^{(3)}+7)$	*f)* $\Delta^2(x^{(-3)}-x^{(-5)})$
g) $\Delta^3(x^3-2)$	*h)* $D^3(4t^6-5t^3-2t)$

6. Demostrar

$$I+E+E^2+\ldots+E^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\Delta^k.$$

Como aplicación, calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

7. Expresar los siguientes polinomios como polinomios factoriales con $h > 0$:

$$a)\ t^4 - 5t^3 + 3t^2 - 6t - 1 \qquad b)\ -t^5 + 3t^4 - 5t^3 - 2t + 9$$

8. Expresar los siguientes polinomios como polinomios factoriales con longitud del intervalo $h = 1$, por dos procedimientos distintos:

$$\begin{array}{ll} a)\ t^3 - t^2 - t - 1 & b)\ 5t^2 - 3t + 3 \\ d)\ -t^4 - 2t - 5t^2 & e)\ 2t^4 - 5 \\ f)\ t^5 & g)\ -6t^2 + 4t + 3 \end{array}$$

9. Sea $f(t)$ una función suficientemente derivable. Demostrar:

$$\Delta^k(f(t)) = 0, \quad \forall k > n \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) \text{ es un polinomio de grado a lo sumo } n$$

10. Demostrar la *regla de Leibnitz*:

$$\Delta^n(y \cdot z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k z\ \Delta^{n-k} E^k\ y.$$

Además, como aplicación calcular:

$$a)\ \Delta^n \left(\frac{a^x}{x^{(-1)}} \right) \qquad b)\ \Delta^2(x^2 \text{tag}\ \pi x)$$

11. Demostrar que en el espacio vectorial de los polinomios Π se verifica

$$(I - \lambda\Delta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\Delta)^n$$

y que además sigue siendo cierta para cualquier función siempre y cuando la serie resultante sea convergente. Como aplicación hallar:

(a) $\dfrac{1}{2+\Delta}(t^2)$

(b) $\dfrac{1}{1-3\Delta}(a^t)$

(c) $\dfrac{\Delta^2}{1-4\Delta}(t^2 + 5t + 1)$

12. Demostrar esta otra expresión de la regla de Leibnitz:

$$\Delta^n(y(t) \cdot g(t)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \binom{n}{k} f(t + kh) \cdot g(t + kh).$$

13. Demostrar

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$

14. Determinar el polinomio que pasa por los siguientes puntos de la tabla

x	3	5	7	9	11
y	6	24	58	108	174

15. Usando la siguiente tabla, encontrar el valor de y correspondiente a $x = 0.30$:

x	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75
y	0.24740	0.34290	0.43497	0.52269	0.60518	0.68164

16. Usando la siguiente tabla encontrar el valor de y correspondiente a $x = 0.6$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.250	1.610	2.173	3.069	4.539	7.029

17. La función Gamma $\Gamma(x)$ viene dada de la siguiente forma para los valores de x.

x	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19
y	0.93304	0.92980	0.92670	0.92373	0.92088

aproximar $\Gamma(1.1673)$.

18. Determinar el dato que falta y hallar el polinomio de menor grado que satisfaga la siguiente tabla

x	0	1	2	3	4
y	1	2		7	11

19. Determinar los valores que faltan:

x	4	5	6	7	8	9
y	72		146	192		302

20. Demostrar

$$2^s = 1 + s + \frac{s(s-1)}{2!} + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!} + \ldots, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

21. Demostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+m} = 1 - \frac{m}{2!} + \frac{m(m-1)}{3!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{(n+1)!} + \ldots$$

22. Hallar

a) $\sum xa^x$.

b) $\sum \frac{t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$.

c) $\sum (k^3 + 2k + 6)\mathrm{sen}(\pi k)$ donde $h = 1$.

23. Se define el *coeficiente Binomial* $\binom{t}{r}$ de la siguiente forma

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}.$$

Entonces:

(a) Demostrar que $\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$ con $h = 1$.

(b) Demostrar que $\sum \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + C(t)$, donde $\Delta C(t) = 0$.

24. Calcular las siguientes sumas definidas:

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{2m-1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{2l-1}{(l+2)(l+4)}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k(k+2)(k+3)}$.

25. Demostrar que

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+b}{a} = \binom{n+b}{a+1} - \binom{m+b}{a+1}.$$

26. Se define la función Digamma $\Psi(x)$ como

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(\Gamma(x)) \quad \text{donde } \Gamma(x) \text{ es la función Gamma}$$

suponiendo en todo el ejercicio $h = 1$.

(a) Demostrar que $\Delta\Psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) Calcular $\sum \dfrac{1}{(x+k)^2}$ en términos de la función Digamma.

(c) Calcular $\sum \dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$ en términos de la función Digamma.

27. Hallar con $h = 1$:

$i)$ $\sum x^2 \mathrm{sen}(x)$	$ii)$ $\sum \dfrac{2^x}{(x^2-1)x}$
$iii)$ $\sum \binom{t}{5}\binom{t}{2}$	$iv)$ $\sum x^2(x-1)$
$v)$ $\sum (k^3+2k+6)\,\mathrm{sen}(\pi k)$	$vi)$ $\sum x^2 \ln x$

28. Sumar los n primeros términos de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{11}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots.$$

29. Sumar la serie:

$$\frac{5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{6}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{7}{5\cdot 7\cdot 9} + \frac{8}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots$$

30. Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{tag}(\pi k)$.

31. Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \cdot \cos(2k)$

32. Encontrar todas las funciones que satisfagan las siguientes relaciones:

    (a) $y(t+1) - y(t) = t^{(3)} + 3^t$

    (b) $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = \binom{t}{5}$

33. Sea $y(t)$ el número máximo de puntos de intersección de t líneas en el plano. Encontrar una expresión en función del operador Δ que satisfaga $y(t)$. Determinar el conjunto de funciones que satisfacen dicha relación.

34. Demostrar

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 a^k = \frac{\left((a-1)^2 n^2 - 2(a-1)n + (a+1)\right) a^{n+1} - a(a+1)}{(a-1)^3}$$

35. Calcular las sumas definidas

$$i)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{(k+2)(k+4)} \qquad ii)\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$$

$$iii)\ \sum_{m=1}^{l} \frac{2m+1}{(m+2)(m+4)} \qquad iv)\ \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+b}{a}$$

$$v)\ \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \qquad vi)\ \sum_{m=1}^{n} \frac{2m-1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

36. Demostrar

$$\sum = -\sum_{k=0}^{\infty} E^k.$$

Como aplicación, calcular $\sum a^x \mathrm{sen}(\pi x)$ donde $h = 2$.

37. Determinar las siguientes funciones

$$a)\ 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{28x^3}{3!} + \frac{65x^4}{4!} + \cdots$$

$$b)\ 1 + 3x + \frac{7x^2}{2} + \frac{13x^3}{3} + \frac{21x^4}{4} + \frac{31x^5}{5} + \cdots.$$

$$c)\ 3 + \frac{5x^2}{2!} + \frac{7x^4}{4!} + \frac{9x^6}{6!} + \ldots$$

$$d)\ 3x - \frac{7}{3!}x^3 + \frac{11}{5!}x^5 - \ldots$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^{n+1}$$

$$f)\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r^3 + 2r + 1}{r!} x^{2r}$$

38. Encontrar la función generatriz de las siguientes sucesiones:

(a) $y_k = k^{(r)}$

(b) $y_k = k^r$

(c) $y_k = \operatorname{sen}(2k-1)$

(d) $y_k = k\ \cos(k\pi/2)$

(e) $y_k = \cosh(ak)$

(f) $y_k = \begin{cases} \dbinom{n}{k}, & k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0, & k > n \end{cases}$

39. Determinar la función generatriz de las sucesiones siguientes

$$i) \begin{cases} y_{2l} = \dfrac{(-1)^l}{(2l)!} \\ y_{2l+1} = 0 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} y_0 = 0 \\ y_k = \dfrac{2^k}{k} \end{cases}$$

40. Definimos la convolución de dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ como la sucesión

$$\{u_n\} * \{v_n\} = \left\{ \sum_{l=0}^{n} u_{n-l} v_l \right\}.$$

Para simplificar la notación la escribiremos

$$u_n * v_n = \sum_{l=0}^{n} u_{n-l}\ v_l.$$

Si denotamos por $U(z), V(z)$ las funciones generatrices de $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ respectivamente:

(a) Demostrar que la función generatriz de $\{u_n * v_n\}$ es $U(z)V(z)$.

(b) Demostrar que la función generatriz de $\left\{ \sum_{l=0}^{n} y_l \right\}$ es $\dfrac{1}{1-z} Y(z)$. Como aplicación calcular la función generatriz de $\left\{ \sum_{l=0}^{n} 3^l \right\}$.

(c) Resolver la ecuación de sumar de Volterra:

$$y_k = 1 + 16 \sum_{m=0}^{k-1} (k-m-1) y_m, \quad k \geq 0.$$

41. Determinar la sucesión cuya función generatriz es:

$$i) \ \frac{2-3z}{1-3z+4z^2} \qquad ii) \ \frac{z+2}{(z-1)^2}$$

42. (a) Demostrar que la función $\dfrac{xe^{xt}}{e^x-1}$ es la función generatriz de una sucesión formada por polinomios (Polinomios de Bernoulli).

(b) A partir de las siguientes propiedades de los polinomios de Bernouilli $B_n(t)$:

$$a)\ D(B_n(t)) = nB_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \qquad b)\ \Delta B_n(t) = nt^{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

demostrar que la función generatriz de $\left\{\dfrac{B_n(t)}{n!}\right\}$ es $\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$.

(c) Usar la fórmula de sumar de Euler, con $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^5$, para calcular B_2 y B_4

43. Demostrar que

$$B_k(t) = (-1)^k B_k(1-t), \quad \forall k.$$

44. Demostrar que

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_{k-i} x^i,$$

y que, como consecuencia:

$$\sum_{l=0}^{n-1} B_l = 0.$$

45. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1}[B_{k+1}(n) - B_{n+1}].$$

46. Demostrar que el conjunto de soluciones particulares de la ecuación en diferencias

$$\Delta y(t) = p(t)$$

donde $p(t)$ es cualquier polinomio y $h = 1$, se puede expresar como una combinación lineal de polinomios de Bernoulli.

47. Demostrar que

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} = \ln n - \frac{1}{12n^2} + \frac{7}{12}$$

con un error menor de $\dfrac{1}{12}$.

48. Demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}}{\ln n} = \frac{1}{2}.$$