CÁLCULO FINITO

Curso 2000/2001

Tema 1: Introducción

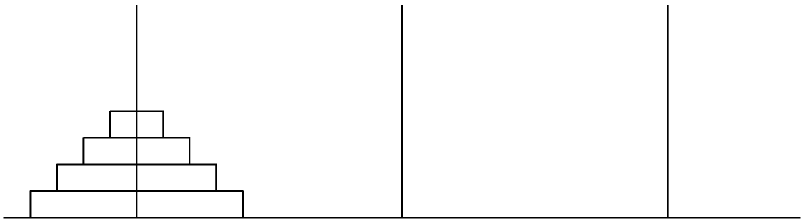
1. En 1626, Peter Minuit compró la isla de Manhattan por un valor de 24\$. Si estos 24\$ se hubiesen invertido con un interés anual del 7% abonados trimestralmente, ¿cuál sería el capital actual?

2. Invertimos 500 000 ptas. en un banco que abona mensualmente los intereses a un 6% anual. ¿Cuánto tendremos en el banco después de 10 años? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para doblar nuestro dinero?

3. En 1517 el rey de Francia, Francis I, compró un cuadro de Leonardo da Vinci, la "Mona Lisa", para su baño en 4000 florines de oro, es decir, 492 onzas de oro. Suponiendo que el valor del cuadro en onzas ha permanecido constante y que el oro ha aumentado su cotización en un 3% anual, ¿cuántos florines podría valer el cuadro al final de este año?

4. Se observa que el decrecimiento en la masa de una sustancia radio activa en un periodo de tiempo fijo es proporcional a la masa que había en el inicio de dicho periodo. Si la vida media del elemento es de 1600 años[1], encontrar una fórmula que exprese la masa en función del tiempo.

5. " El problema de la Torre de Hanoi ": el problema se basa en determinar el número mínimo de movimientos $y(t)$ necesarios para mover t anillos del primer palo (ver dibujo) al tercer palo. Un movimiento consiste en mover un anillo de un palo a otro, con la restricción de que un anillo más grande no puede estar sobre uno más pequeño.



6. Determinar el número máximo de puntos de intersección de t líneas en el plano.

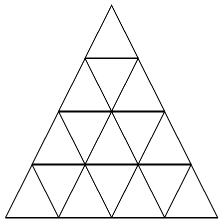
7. Un cuerpo de temperatura 80^o F se introduce en una bañera de agua de 50^o F de temperatura constante. Después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de 70^o F. Experimentos indican que al final de cada minuto la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el agua es proporcional a la diferencia al principio del minuto. ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 10 minutos ? ¿Cuándo alcanzará los 60^o F de temperatura?

8. Si $R(t)$ denota el número de regiones que determinan t líneas en el plano, de tal forma que dos de ellas no sean paralelas y que tres no se corten en un único punto, determinar $R(t)$.

9. Sea ABCD una mesa de billar cuadrada de lado a. Una bola de billar es proyectada desde un punto O del lado AB con un ángulo α (respecto AB), y ésta se refleja con el mismo ángulo sobre BC, CD, DA y así sucesivamente. ¿Dónde golpea después de haber realizado n circuitos?

[1] El periodo de vida media o semivida de un elemento es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa del elemento. Es independiente de la masa original que se tome.

10. Supongamos que cada lado de un triángulo equilátero con el vértice ascendente está dividido en n partes iguales, que son luego utilizadas para dividir el triángulo en triángulos equiláteros más pequeños, tal y como muestra la figura (para $n = 4$):



¿Cuántos triángulos con el vértice ascendente de todos los tamaños hay?

11. (Modelo francés de amortización de préstamos) Juan se ha comprado una casa de 15 000 000 ptas, mediante una hipoteca por todo este valor al 5% anual durante 25 años.

    (a) Si consideramos que el interés se mantiene fijo a lo largo de estos 25 años, calcular:

    i. ¿Cuánto va a pagar cada mes (cuota mensual)?

    ii. En la primera cuota, ¿cuánto pagará de intereses y cuánto de amortización del préstamo? ¿y después de 1 año? ¿y de 10 años? ¿y después de 20?

    iii. ¿Cuánto habrá ganado el banco al final?

    (b) Si la hipoteca es a interés variable y la revisión del primer año es del 6.5%, ¿cuánto valdrá la cuota del segundo año? Si quiere que la cuota del segundo año sea de 90 000 ptas., ¿cuánto capital habrá de amortizar anticipadamente el primer año, aparte de las cuotas?

12. Supongamos que los conejos se reproducen con una velocidad de tal forma que una pareja nace cada mes a partir de una pareja mayor de dos meses. Si inicialmente hay una pareja de adultos y ninguno muere, comprobar que el número total de parejas en los sucesivos meses vienen dados por 1,2,3,5,8,... (*sucesión de Fibonacci*). Determinar una ecuación en recurrencia que permita calcular el número de parejas en función de los meses transcurridos.

13. Sea D_n el determinante de orden n siguiente:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

Encontrar una ecuación de recurrencia que permita calcular D_n sin necesidad de desarrollar el determinante.

14. Supongamos que n hombres han bebido más de la cuenta y deben elegir al azar su sombrero entre los n sombreros.

    (a) Si $W(n)$ es el números de casos posibles de que ningún hombre haya elegido su sombrero, verificar:

$$W(n) = (n-1)[W(n-1) + W(n-2)], \quad n \geq 3.$$

(b) Si la probabilidad de que ningún hombre haya escogido su sombrero es $P(n) = W(n)/n!$, probar:

$$P(n) = P(n-1) + \frac{1}{n}\,(P(n-2) - P(n-1)), \quad n \geq 2.$$

(c) Demostrar que

$$P(n) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \geq 2.$$

15. Consideramos la integral exponencial $E_n(x)$ definida de la siguiente forma:

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt, \qquad x > 0, \quad n \in I\!N$$

Probar que satisface: $\qquad E_{n+1}(x) = \frac{1}{n}[e^{-x} - xE_n(x)]$