Cálculo finito

Tema 2
El cálculo en diferencia

1. **Operador diferencia (Δ) y traslación (E):** $h > 0$

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t).$$

$$Ey(t) = y(t+h).$$

$$\Delta = E - I.$$

$$\Delta^n y(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E^j y(t).$$

$$E^n y(t) = y(t+nh) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j y(t).$$

Propiedades: (c constante)

$$\boxed{\begin{array}{rl} E(y+z) & = Ey + Ez \\ E(cy) & = cEy \\ E^n(E^m y) & = E^m(E^n y) = E^{n+m} y \\ \hline \Delta E y & = E\Delta y \\ \hline \Delta(y+z) & = \Delta y + \Delta z \\ \Delta(cy) & = c\Delta y \\ \Delta(yz) & = y\ \Delta z + \Delta y\ Ez \\ & = \Delta y\ z + Ey\ \Delta z \\ \Delta\left(\dfrac{y}{z}\right) & = \dfrac{\Delta y\ z - y\ \Delta z}{z\ Ez} \end{array}}$$

2. **Diferencia de funciones elementales:** (a, c constantes)

f	Δf
c	0
a^t	$a^t(a^h - 1)$
$\operatorname{sen} at$	$2\operatorname{sen}\,(ah/2)\ \cos a(t + h/2)$
$\cos at$	$-2\operatorname{sen}\,(ah/2)\ \operatorname{sen}\ a(t + h/2)$
$\ln at$	$\ln(1 + h/t)$
$\ln \Gamma(t)$	$\ln t \quad (h = 1)$

3. **Función factorial:**

$$t^{(n)} = \begin{cases} t(t-h)\cdots(t-(n-1)h), & n = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{1}{(t+h)(t+2h)\cdots(t+(-n)h)}, & n = \ldots, -2, -1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta t^{(n)} = nh\ t^{(n-1)}}$$

4. **Polinomio factorial:**

$$p(t) = p_0 + p_1 t^{(1)} + p_2 t^{(2)} + \ldots + p_n t^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} p_i t^{(i)} \ \in \Pi_n, \quad p_n \neq 0.$$

$$\Pi_n = \{q(t) \ / \ q(t) \text{ polinomio de grado } n\}$$

$$p(t) \in \Pi_n : \ p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \{p_i\}_{i=0}^{n} : \ p(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i t^{(i)}.$$

División sintética: Dado $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ expresarlo como polinomio factorial $p(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i t^{(i)}$:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 = p_0 \\
h & & hb_n^{(1)} & hb_{n-1}^{(1)} & \cdots & hb_4^{(1)} & hb_3^{(1)} & hb_2^{(1)} & \\
\hline
 & b_n^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} & b_{n-2}^{(1)} & \cdots & b_3^{(1)} & b_2^{(1)} & b_1^{(1)} = p_1 & \\
2h & & 2hb_n^{(2)} & 2hb_{n-1}^{(2)} & \cdots & 2hb_4^{(2)} & 2hb_3^{(2)} & & \\
\hline
 & b_n^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} & b_{n-2}^{(2)} & \cdots & b_3^{(2)} & b_2^{(2)} = p_2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 & b_n^{(n-2)} & b_{n-1}^{(n-2)} & b_{n-2}^{(n-2)} = p_{n-2} & & & & & \\
(n-1)h & & (n-1)hb_n^{(n-1)} & & & & & & \\
\hline
 & b_n^{(n-1)} = p_n & b_{n-1}^{(n-1)} = p_{n-1} & & & & & &
\end{array}$$

Propiedades:

$$n, k \in I\!N : \quad t^{(n)}(kh) = \begin{cases} 0, & n \geq k+1 \\ \dfrac{k!}{(n-k)!} h^n, & n \leq k \end{cases}$$

$$n, k \in I\!N : \quad \Delta^n t^{(k)} = \begin{cases} 0, & n \geq k+1 \\ \dfrac{k!}{(n-k)!} h^n t^{(k-n)}, & n \leq k \end{cases}$$

$$p(t) \in \Pi_n : \quad \Delta^n p(t) = \Delta^n \sum_{i=0}^{n} p_i t^{(i)} = p_n n! \ h^n; \qquad \Delta^m p(t) = 0, \ \ \forall m > n.$$

5. **Polinomio interpolador:** Sea $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I), \ I \subset I\!R$ intervalo y sean $n+1$ puntos $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ distintos entre sí. Entonces existe $p \in \Pi_n$ tal que

$$p(t_i) = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$f(t) = p(t) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n), \quad \forall t \in I,$$

con $\theta \in (\min\{t, t_0, \ldots, t_n\}, \max\{t, t_0, \ldots, t_n\})$.

6. **Fórmula de Gregory–Newton:** Sea $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I),\ I \subset \mathbb{R},\ a \in I,\ t_k = a + kh,\ k = 0, 1, ..., n\ (\Delta t = h)$. Entonces $\forall t \in I$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(t) = f(a) + \dfrac{\Delta f(a)}{\Delta t}\dfrac{(t-a)^{(1)}}{1!} + \dfrac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta t)^2}\dfrac{(t-a)^{(2)}}{2!} + \ldots + \dfrac{\Delta^n f(a)}{(\Delta t)^n}\dfrac{(t-a)^{(n)}}{n!} + R_n \\ R_n = \dfrac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(t-a)^{(n+1)} \end{array}}$$

donde $\xi \in (\min\{t, t_0, \ldots, t_n\}, \max\{t, t_0, \ldots, t_n\}) \subset I$.

Alternativa: $t = a + \theta h$:

$$\begin{aligned} f(a+\theta h) &= f(a) + \frac{\theta}{1!}\Delta f(a) + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \ldots \\ &+ \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-(n-1))}{n!}\Delta^n f(a) + R_n \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n)$$

7. **Regla de Leibniz:**

$$\Delta^m(y(t)z(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k y(t)\ \Delta^{n-k}E^k z(t).$$

8. **Tablas de diferencias:**

t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\ldots$	$\Delta^n y$
a	y_0					
$a+h$	y_1	Δy_0				
$a+2h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
$a+3h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$a+nh$	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\ldots$	$\Delta^n y_0$

- La suma de los términos de una columna es igual a la diferencia entre el último y el primero de la columna anterior.
- Para determinar la tabla sólo es necesario conocer un elemento de cada columna.
- $\Delta^n y_k$ depende solamente de los elementos sobre la $(n+1)-$ésima diagonal hacia abajo y la $(n+k)-$ésima diagonal hacia arriba.

9. **Relación diferencia/derivada:**

   - En Π_n:

$$E = I + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \ldots + \frac{h^nD^n}{n!}$$
$$\Delta = hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \ldots + \frac{h^nD^n}{n!}$$
$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^n}{n}\right]$$

   - Para f general:

$$\begin{cases} \Delta f(a) = hDf(a) + \dfrac{h^2}{2!}D^2f(a) + \ldots + \dfrac{h^n}{n!}D^nf(a) + R_n, \\ R_n = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}D^{n+1}f(\xi), \qquad \xi \in (a-h, a+h). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Df(a) = \dfrac{1}{h}\left[\Delta f(a) - \dfrac{\Delta^2 f(a)}{2} + \dfrac{\Delta^3 f(a)}{3} - \dfrac{\Delta^4 f(a)}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{\Delta^n f(a)}{n}\right] + \hat{R}_n, \\ \hat{R}_n = (-1)^n \dfrac{D^{n+1}f(\xi)}{n+1}h^n, \quad \xi \in (\min\{t_0 = a, \ldots, t_n\}, \max\{t_0 = a, \ldots, t_n\}). \end{cases}$$

10. **Operador suma indefinida ($\sum$):** operador inverso por la derecha del operador diferencia:

$$y(t) \longrightarrow \sum y(t) \iff \Delta(\sum y(t)) = y(t).$$

Nota: sin embargo, $\sum(\Delta y(t)) = y(t) + c(t)$ con $\Delta c(t) = 0$ arbitraria.

Si el dominio de y es un subconjunto de enteros: $c(t)$ es una constante arbitraria.

Si el dominio de y es un subconjunto de reales: $c(t)$ es una función periódica arbitraria.

Propiedades: salvo funciones $c(t)$ arbitrarias con $\Delta c = 0$ (k constante)

$\sum(y+z) = \sum y + \sum z$ $\sum ky = k\sum y$
sumación por partes: $\sum(y\ \Delta z) = yz - \sum(Ez\ \Delta y)$ $\sum(Ey\ \Delta z) = yz - \sum(z\ \Delta y)$

11. **Suma indefinida de funciones elementales:**

f	$\sum f$	cuando
a^t	$\dfrac{a^t}{a^h-1}+c(t)$	$h \neq 0,\ a \neq 1$
$\text{sen } at$	$-\dfrac{\cos a(t-h/2)}{2\text{sen } (ah/2)}+c(t)$	$ah \neq 2n\pi$
$\cos at$	$\dfrac{\text{sen } a(t-h/2)}{2\text{sen } (ah/2)}+c(t)$	$ah \neq 2n\pi$
$\ln t$	$\ln \Gamma(t)+c(t)$	$h=1$
$t^{(k)}$	$\dfrac{t^{(k+1)}}{h(k+1)}+c(t)$	$k \neq -1$

12. **Suma definida**: suponiendo que el dominio de una función $y(t)$ es el conjunto discreto

$$\{a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots\}, \qquad a, h \in I\!R,$$

se define como suma definida de una función $y(t)$ a cualquier suma de un número de valores sucesivos de $y(t)$, es decir:

$$\sum_{k=m}^{n} y(t+kh), \quad n, m \in I\!N, \quad n \geq m.$$

Convenio: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} y(t+kh) = 0$ si $n < m$.

Abreviación: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} y(t+kh) = \sum_{k=m}^{n} y_k$, denotando $y_k = y(t+kh)$.

13. **Relación suma indefinida/suma definida:**

Si $z(t)$ es una suma indefinida de $y(t)$, $m \leq n$, entonces:

$$\sum_{k=m}^{n} y(t+kh) = z(t+kh)]_m^{n+1} = z(t+(n+1)h) - z(t+mh),$$

ó:

$$\sum_{k=m}^{n} y_k = \sum y(t)\Big]_{a+mh}^{a+(n+1)h}.$$

14. **Suma definida por partes:**

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = b_{n+1} \sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} \left(\sum_{l=m}^{k} a_l \right) \Delta b_k.$$

15. **Función generatriz de una sucesión de funciones:** Sea $\{y_k(t)\}_{k\in I\!N}$ una sucesión de funciones. Supongamos que existe una función $g(t,x)$ tal que

$$g(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t)\ x^k,$$

es uniformemente convergente para los x en un intervalo abierto del 0. Entonces g se llama función generatriz de la sucesión $\{y_k(t)\}_{k\in I\!N}$.

Los elementos de la sucesión $\{y_k(t)\}_{k\in I\!N}$ son los coeficientes del desarrollo de Taylor respecto x de $g(t,x)$ en el cero, es decir:

$$y_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k} g(t,x)_{|x=0}.$$

16. **Polinomios y números de Bernoulli:** Se denominan *polinomios de Bernoulli* $B_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, a los polinomios que surgen de la ecuación:

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\ x^n,$$

es decir, la función $\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$ es la generatriz de la sucesión $\{B_n(t)/n!\}$, ó:

$$B_n(t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{\frac{xe^{tx}}{e^x - 1}\right\}_{|x=0}.$$

Se denominan *números de Bernoulli* B_n a los números:

$$B_n = B_n(0).$$

Propiedades:

(a) $B'_n(t) = nB_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$

(b) $B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} B_j, \quad B_0 = 1.$

(c) $\Delta_t B_n(t) = B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}, \quad n \geq 0.$

(d) $B_n = B_n(0) = B_n(1), \quad n \neq 1.$

(e) $B_{2n+1} = 0, \quad n \geq 1.$

(f) $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = 0.$

(g) $B_n(t) = (-1)^n B_n(1-t).$

Teorema: *(aproximación de sumas definidas mediante integrales)* Sea $y(t)$ una función real tal que $y^{(2m}$ es continua en el intervalo $[1, n]$, para ciertos $m \geq 1$ y $n \geq 2$. Entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} y(k) &= \int_1^n y(t)dt + \frac{y(1)+y(n)}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \left(y^{(2j-1}(n) - y^{(2j-1}(1) \right) \\ &\quad - \frac{1}{(2m)!} \int_1^n B_{2m}(t-[t])\, y^{(2m}(t)dt \end{aligned}}$$

donde $[t]$ denota la parte entera de t.