ANALISIS MATEMATICO VI. Tema V y VI: Singularidades aisladas de funciones analíticas y aplicaciones

1. Clasificar la singularidad de f en z_0 y determinar Res (f, z_0):

   a) $f(z) = \frac{\cos z}{\text{sen } z}$, $z_0 = \pi$ b) $f(z) = \frac{\cos(\pi z/2)}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ c) $f(z) = \frac{\text{sen}^2 z}{(z-\pi)^6}$, $z_0 = \pi$

   d) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$ e) $f(z) = (z+1)^4 \text{sen}\,(\frac{\pi}{(z+1)})$, $z_0 = -1$ f) $f(z) = \frac{\text{Log}^2 z}{(z-1)^5}$, $z_0 = 1$

2. Determinar la parte singular de f en z_0 y utilizarla para clasificar la sigularidad en z_0 y calcular Res (f, z_0):

   a) $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$ b) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, $z_0 = -i$ c) $f(z) = \frac{\text{sen}\,(z^3)}{(1-\cos z)^3}$, $z_0 = 0$

3. Resolver las siguientes integrales:

   a) $\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} dz$ b) $\int_{|z-6|=4} \frac{1}{\text{sen } z} dz$

   c) $\int_{|z-1|=3/2} \frac{e^{1/z}}{z^2-1} dz$ d) $\int_{|z|=1} \frac{\text{sen } z - z}{z^6} dz$

4. Probar las siguientes igualdades:

   a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k - \text{sen } \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}$, $k > 1$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $a > b \geq 0$

5. Demostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\text{sen } p\pi}. \quad 0 < p < 1$$

6. Resolver las siguientes integrales:

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ b) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{ab(b+a)}$, $a, b > 0$

7. Supóngase que f es una función analítica no constante en un dominio D del plano complejo. Si $|f|$ tiene un mínimo local en un punto a de D, entonces $f(a) = 0$ (Principio del mínimo).

8. Probar que todas las raíces de $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ yacen entre las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 2$.

9. Resolver las siguientes integrales:

   a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+8} dx$ b) $\int_0^\infty \frac{x}{(x^4+1)} dx$ c) $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^5+1} dx$

10. Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| > e$. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $cz^n = e^z$ tiene n soluciones diferentes en el disco unidad $\mathbb{D}$ y que son las únicas en el semiplano $\{\text{Re } z < 1\}$.

11. Sea $f(z) = z^5 + 5z^3 - 1$. Probar que sus cinco raíces están contenidas en el disco $D(0, 7/3)$ y son simples. Probar que tres de ellas están contenidas en el disco unidad.

12. Probar el teorema fundamental del álgebra usando el teorema de Rouché.