ANALISIS MATEMATICO VI. Tema III: El Terorema de Cauchy

1. Describir los siguientes caminos indicando si son simples, cerrados y su regularidad.
   a) $\gamma(t) = t^2 + it^4, \ -1 \le t \le 1$ b) $\gamma(t) = e^{it^2}, \ 0 \le t \le \sqrt{2\pi}$
   c) $\gamma(t) = t^3 + i|t|^3, \ -1 \le t \le 1$ d) $\gamma(t) = e^t + ie^{-t}, \ 0 \le t \le 1$
2. Dados los caminos α, β y γ definidos en [0,1] por $\alpha(t) = t + it$, $\beta(t) = t + it^2$ y $\gamma(t) = t^2 + it$. Determinar las parametrizaciones de $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ y $\alpha - \beta + \gamma$.
3. Si $\gamma(t) = te^{it}, \ 0 \le t \le \pi$, calcular las siguientes integrales:
   a) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|\, |dz|$ c) $\int_\gamma z\, dz$
4. Si $\gamma(t) = [e^{2\pi}, 1] + e^{t+it}, \ 0 \le t \le \pi$, calcular las siguientes integrales:
   a) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|^{-1}\, |dz|$ c) $\int_\gamma e^z\, dz$
5. Probar que para todo caminos regular a trozos γ y toda función continua en γ se verifica $\int_\gamma f(z)\, |dz| = \int_{-\gamma} f(z)\, |dz|$.
6. Si $\gamma(t) = e^{1+it}, \ 0 \le t \le \pi$, probar que
$$\left| \int_\gamma (\mathrm{Log} z)^{-1}\, dz \right| \le e\mathrm{Log}(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$
7. Para $a, b > 0$, probar que
$$\left| \int_0^{a+ib} \cos(z^2)\, dz \right| \le \frac{(a^2 + b^2)^{1/2} \mathrm{sinh}\ (2ab)}{(2ab)}.$$
8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ verificando $a < b$, y para todo $c \in \mathbb{R}$ sea $I(c) = \int_{c+ia}^{c+ib} e^{-z^2}\, dz$. Deducir que $I(c) \to 0$ cuando $c \to \pm\infty$.
9. Para $b > 0$, probar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2b\pi t)\, dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2\pi^2}$. [1]
10. Calcular: (i) $\int_{|z|=1} \sqrt{9 - z^2}\, dz$; (ii) $\int_{|z|=1} (z^2 + 2z)^{-1}\, dz$; (iii) $\int_{|z+i|=3/2} (z^4 + z^2)^{-1}\, dz$.
11. Si $\gamma(t) = 2\cos t + i\mathrm{sen}t, \ 0 \le t \le 2\pi$, calcular las siguientes integrales:
    a) $\int_\gamma \mathrm{sen}(z^2)\, dz$ b) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ c) $\int_\gamma (z^2 + 2iz)^{-1}\, dz$. [2]
12. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde $\gamma_1(t) = e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-2it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, y $\gamma_3(t) = 1 - i + e^{it}$ $(\pi/2 \le t \le 9\pi/2)$. Determinar los valores de $n(\gamma, z)$ para todos los puntos de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.
13. Calcular: i) $\int_{|z|=1} z^{-1}\mathrm{Log}(z + e)\, dz$; (ii) $\int_{|z-2|=3/2} (z^2 - 1)^{-1}\mathrm{Arctg}\ z\, dz$; (iii) $\int_{|z|=2} (z + 1)^{-2} e^z\, dz$.
14. Sea $\gamma = [-1, 1 + i] + \beta + [-1 + i, 1]$, donde $\beta(t) = i + e^{it}$, $0 \le t \le 3\pi$. Calcular $\int_\gamma (z^2 + 1)^{-1}\, dz$.

---

[1] AYUDA: Considerar $\int_{\partial R} e^{-z^2}\, dz$ con R el rectángulo de vértices $-c, c, c + b\pi i, -c + b\pi i$ y el ejercicio anterior. Utilizar que
$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[2] AYUDA: Para b) pensar en $\int_{|z|=1} z^{-1}\, dz$

15. a) Para $r > 0$ sea $I(r) = \int_{\gamma_r} z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Probar que $I(r) \longrightarrow 0$ cuando $r \to \infty$ y $I(r) \longrightarrow \pi i$ cuando $r \to 0$.[3]

    b) Probar que $\int_0^\infty t^{-1} \text{sen} t\, dt = \pi/2$. [4]

16. Sea $f = u + iv$ una función entera que verifica $u_x v_y - u_y v_x = 1$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| = 1$.

17. Sea $f = u + iv$ una función entera que verifica $u_x + v_y = 0$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $\text{Re}\, a = 0$.

18. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Definimos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ por $f(z) = (z-1)/\text{Log} z$ si $z \neq 1$ y $f(1) = 1$. Probar que esta función es analítica.

19. Calcular las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_{|z-2i|=3/2} \frac{\text{arcsen } z}{(z-i)^3}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{|z-2|=3/2} \frac{\text{Log}(1+z)}{(z^2-1)^2}\, dz$

    c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\, dz \quad (k \in \mathbb{N})$ d) $\displaystyle\int_{\partial Q} \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z^3+z^2)^1}\, dz$ con Q el cubo de vértices $2, 2i, -2, -2i$.

20. Sea f una función analítica en un dominio convexo A y $|f'(z)| \le m$ para todo z de A. Probar que $|f(z_1) - f(z_2)| \le m|z_1 - z_2|$ se verifica para todo par de puntos de A.

21. Si una función f es analítica en un dominio convexo A y si $\text{Re} f'(z) \neq 0$, entonces f es inyectiva en A.

22. Una función analítica en $\mathbb{D}$ verifica $f(0) = 0$ y $|f'(z)| \le c(1-|z|)^{-n-1}$ en todo el disco con n un entero no negativo y $c > 0$. Probar que $|f(z)| \le cn^{-1}(1-|z|)^{-n}$ si $n \ge 1$ y $|f(z)| \le c\text{Log}[(1-|z|)^{-1}]$ si $n = 0$.

23. Teorema de Gauss-Lucas: Sean $z_1, z_2, .., z_n$ las raíces del polinomio $p(z)$. Probar que toda raíz ζ de $p'(z)$ puede escribirse de la forma

$$\zeta = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n, \quad \text{donde } \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \ge 0, \ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1.$$

    Se dice que las raíces de $p'(z)$ pertenecen a la envolvente convexa de $\{z_1, ..., z_n\}$.

24. Probar la siguiente generalización del Lema de Schwarz. Sea f una función analítica en $D = D(z_0, r)$ y $m > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| \le m$ para todo $z \in D$. Probar que $|f'(z_0)| \le m/r$ y $|f(z) - f(z_0)| \le \frac{m}{r}|z - z_0|$ para todo $z \in D$.

---

[3] AYUDA: Para la segunda parte probar primero que $\int_{\gamma_r} z^{-1}(e^{iz} - 1)\, dz \longrightarrow 0$ cuando $r \to 0$.

[4] AYUDA: Para $0 < s < r < \infty$ considerar $\int_\gamma z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma = [s, r] + \gamma_r + [-r, -s] - \gamma_s$ y $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\gamma_s(t) = se^{it}$ para $0 \le t \le \pi$.