ANALISIS MATEMATICO VI. Tema II: Funciones holomorfas

1. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio G, determinar tras el cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta$ la expresión en estas coordenadas de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

   Dar la expresión de $f'(z)$ en función de las derivadas parciales de r y θ.

2. Determinar el ángulo con el que es rotada por la función $f(z) = z^2$ toda curva que pase por el punto: a) $z_0 = i$; b) $z_0 = 1 + i$.

3. Determinar dónde admiten derivada las siguientes funciones. Hallar el conjunto donde son analíticas.

   a) $f(z) = \bar{z}$ b) $f(z) = x^2 - y^2 - i2xy$ c)$f(z) = z^{10}$

   d) $f(z) = z^{-5}$ e) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - y^2)$ f) $f(z) = x$

   g) $f(z) = e^x\cos y - ie^x\text{sen}y$ h) $f(z) = \cos x + i\text{sen}y$ i) $\tan z$

   j) $f(z) = z + z^{-1}$ k) $f(z) = -xy + \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$ l) $f(z) = (y+1)^2 + i(x+1)^2$

   m) $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\text{sen}(2xy))$ n) $f(z) = \frac{z^2}{e^z}$ ñ) s) $f(z) = 3ze^{iz} + |z|^2 + 4$

   o) $f(r,\theta) = r^4\text{sen}4\theta - ir^4\cos 4\theta$ p) $f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta + ir^2\text{sen}^2\theta$ q) $f(r,\theta) = \ln r^2 + i2\theta$

4. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en un dominio G y cuya función derivada es también analítica en G. Determinar la expresión de $f''(z)$.

   ¿Qué condiciones adicionales a las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos asegurar que verifican en este caso u y v?

5. Probar la *Regla de L'hôspital* para funciones complejas:

   Si f y g son dos funciones diferenciables en z_0 tales que $f(z_0) = 0 = g(z_0)$ y $g'(z_0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

6. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-2}{z^{16}-1} \qquad b)\ \lim_{z\to i}\frac{z^9+z-2i}{z^{15}+1} \qquad c)\ \lim_{z\to 0}\frac{e^{\beta e^z}-e^{\beta}}{e^{iz}-1}$$

7. Sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ calcular:

$$a)\ \lim_{z\to 0}\frac{f(2z)}{z} \quad b)\ \lim_{z\to 0}\frac{f(z^2)}{z} \quad c)\ \lim_{z\to i}\frac{f(z^2+1)}{z-i}$$

8. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio G verificando que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ y que $f(\bar{z})$ es analítica en G. Probar que f es constante.

   Utilizar este argumento para asegurar que $f(z) = (\bar{z})^3 + \bar{z}$ no es analítica en ningún punto.

9. ¿Existe alguna función f analítica en $\mathbb{C}$ que verifique $\text{Re}f(z) = x - 2y^2$?

10. Determinar la función entera $f(z)$ que verifique $\text{Re}f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $\text{Re}f(0) = 6$ y $f(1+i) = 0$.

11. Estudiar la diferenciabilidad de la función $\sqrt[3]{z}$.

12. Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones analíticas en un dominio G tales que $f'(z) = g'(z)$ en todo punto de G, probar que entonces f y g difieren en una constante.

    Utilizar este resultado para probar que si $f'(z) = a \in \mathbb{C}$ para todo z, entonces $f(z) = az + b$.

13. Sea f una función analítica en un dominio G y que verifica $\text{Arg}[f(z)] = \alpha \in \mathbb{R}$ para todo $z \in G$ donde $f(z) \neq 0$. Probar que f es constante.

14. Sea $f(z) = u+iv$ una función analítica en un dominio G tal que $v(z) = (u(z))^2$. Probar que f es constante.

15. Sea $f = u + iv$ una función entera verificando $u_x v_y - u_y v_x = 1$ en todo el plano complejo. Probar que f es de la forma $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| = 1$.

16. Probar las siguientes relaciones:

    a) $\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ b) $\text{sen}(z_1 \pm z_2) = \text{sen}z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \text{sen}z_2$
    c) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \text{sen}z_1 \text{sen}z_2$ d) $\text{sen}^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$

17. Determinar los complejos tales que $\text{sen}z - \cos z = 0$.

18. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

    a) $e^z = e^{2+i}$ b) $e^z = e^{2z}$ c) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$
    d) $(e^z - 1)^2 = e^z$ e) $(e^z - 1)^3 = 1$ f) $e^{e^z} = 1$

19. Sea la rama del logaritmo definida por $f(z) = \log z = \ln|z| + i\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Determinar su dominio de analiticidad. Calcular $f(-e^2)$. ¿Podemos dar un valor de $f(e^2)$ para esta rama analítica?

20. Considérese la rama analítica del logaritmo en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x = 0,\ y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $log(-1) = i\pi$, se pide hallar: a) $\log 1$; b) $\log(ie)$; c) $log(-e - ie)$.

21. Considérese la rama analítica del logaritmo en dominio $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = y,\ y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $\log 1 = i2\pi$, se pide hallar: a) $\log i$ b) $\log(\sqrt{3} + i)$ c) $log(-\sqrt{3} + i)$.

22. Sea la función $f(z) = \text{Log}(z - i)$. a) Determinar el dominio de analiticidad de esta función.

    b) Hallar $f(-i)$.

    c) Explicar por qué $g(z) = f(z)/(z - 2i)$ tiene una singularidad en el dominio de analiticidad de $f(z)$, pero $h(z) = f(z)/(z + 2 - i)$ sí es analítica en este dominio.

23. Determinar el dominio de analiticidad de $f(z) = \text{Log}(z^2 + 1)$.

24. Calcular $f'(z_0)$, considerando la rama principal, para: a) $f(z) = z^{1/4}$, $z_0 = i$; b) $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = -9i$; c) $f(z) = z^z$, $z_0 = i$; d) $f(z) = z^{\text{sen}z}$, $z_0 = i$; e) $f(z) = i^{e^z}$, $z_0 = i$.

25. Si $f(z) = z^{1/2}$ es la rama definida en $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x = 0,\ y \leq 0\}$ y $f(4) = -2$, hallar: a) $f(9)$; b) $f(-1-i)$; c) $f(9 - i9\sqrt{3})$.

26. Hallar $f'(i)$ si $f(z) = i^{e^z}$ y se usan valores principales.

27. Calcular $f'(-64i)$ si se emplea la rama principal de $f(z) = z^{7/6}$.

28. Sea $f(z) = 10^{e^z}$. Esta función se evalúa de manera que $|f(i\pi/2)| = e^{-2\pi}$. Hallar $f'(z)$ y $f'(i\pi/2)$.

29. Determinar explícitamente las funciones trigonométricas inversas arcsen z y arccos z. Hallar sus derivadas.

30. Probar que arcsen z +arccos z=$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

31. ¿En cuál de los siguientes dominios puede definirse una rama del logaritmo?
    a) $D = \{z : x + y < 0\}$ b) $D = \{z : 1 < |z| < e\}$ c) $D = \{z : 1 < |z| < e\} \setminus \{ti : 1 < t < e\}$
    d) $D = \{z : 0 < y - x < 1\}$ e) $D = \{z : 0 < |x| + |y| < 1\}$

32. Sea $D = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{e^{t+it} : -\infty < t < \infty\})$ y $L(z)$ la rama del logarítmo en D que verifica $L(e) = 1$. Calcular: a) $L(e^6)$; b) $L(-e^8)$; c) $L(ie^{\pi k})$, $k \in \mathbb{Z}$.

33. Calcular ∂f y $\overline{\partial} f$ para las siguientes funciones.
    a) $f(z) = 2x^3y + i(x^2 - y)$ b) $f(z) = 3z^2 + e^{\bar{z}} + z|z|^4$
    c) $f(z) = \mathrm{Log}(1 - |z|^2)$ d) $f(z) = \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}$