ANALISIS MATEMATICO VI. Tema I: Preliminares

---

1. Si $z = 1 + 2i$ y $w = 3 + 4i$, expresar en forma binómica los siguientes números complejos: $3z + iw$, $2z^2 - z\overline{w}$, $2|w| + (1 - i)z^2$, $(w + z)/(w - z)$, $(1 - iz)/(1 + iz)$, $(z + 5z^{-1})^{-1}$, $Im(\overline{z}w^2) + 25iRe(zw^{-1})$, $5cos[Arg(z^2)] + 5isen[Argw]$.

2. Para $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, ¿cuáles de las siguientes expresiones son ciertas?

$$a)\ \tfrac{Rez}{Rew} = Re(\tfrac{z}{w}) \qquad b)\ Im(\tfrac{1}{z\overline{w}}) = Im(\tfrac{1}{\overline{z}w}) \qquad c)\ \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{\overline{z}} = 2Re(\tfrac{1}{z})$$

$$d)\ z\overline{w}(\overline{z} + w) = \overline{\overline{z}w(z + \overline{w})} \qquad e)\ Im(\tfrac{1}{z\overline{z}}) = -Im(\tfrac{1}{z\overline{z}}) \qquad f)\ Re(\tfrac{1}{z\overline{w}}) = Re(\tfrac{1}{\overline{z}w})$$

3. Expresar en forma polar los siguientes complejos:

$$(a)\ \frac{(1+i)(2)_{3\pi/4}}{(3)_{\pi}} \quad (b)\ \frac{3e^{i\pi/2}}{(1+i)4e^{i5\pi/6}} \quad (c)\ \frac{(e^{i\pi/6})^4}{(e^{-i\pi/6})^4}$$

4. Expresar en forma binómica y polar los siguientes complejos:

a) $(\sqrt{3}+i)^8$	b) $(-1-i)^{-13}(-\sqrt{3}-i)^{13}$	c) $\sqrt{i}$
d) $\sqrt[3]{-1+i}$	e) $\sqrt[4]{-1}$	f) $(1-i\sqrt{3})^{-1/3}$
g) e^{3+4i}	h) $e^{\frac{1}{1-i}}$	i) $\sin(1-2i)$

5. Demuestra que si $z = (\rho)_\theta$ entonces $z^{-1} = (\frac{1}{\rho})_{-\theta}$. Además si $z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}$ y $z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}$ ¿Cómo sería en polares $\frac{z_1}{z_2}$?

6. $z^{\frac{1}{m}}$ y $z^{\frac{-1}{m}}$ tienen m valores cada uno. ¿Es cierto para todos estos valores que $z^{\frac{1}{m}}z^{\frac{-1}{m}} = 1$? Estudiar cuando es posible.

7. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$ se verifica para todo complejo $z \neq 1$ y todo natural n.

8. Probar que $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$. Apoyándose en esta relación y para cualquier $z \neq 0$ y $w \neq 0$, probar que $|z + w| = |z| + |w|$ si, y solo si, $w = tz$ para algún $t > 0$.

9. Describir geométricamente los siguientes conjuntos del plano complejo $\mathbb{C}$:

(i) $\{z : \|z-1\| = \|z-i\|\}$	(ii) $\{z : \|z-1\| = 2\|z-i\|\}$	(iii) $\{z : \|z-1\| = x\}$
(iv) $\{z : (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 1\}$	(v) $\{z : z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0\}$	(vi) $\{z : \|z-i\| + \|z+i\| = 4\}$
(vii) $\{z : Argz = \pi/4\} \cup \{0\}$	(viii) $\{z : \|Argz - Argi\| < \pi/6\}$	(ix) $\{z : \|Arg(z-i)\| < \pi/6\}$

10. Comprobar que $2Arg(1 + z) = Argz$ para $|z| = 1$ salvo $z = -1$.

11. Probar que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Probar también que, salvo para valores de z reales negativos, $\overline{\mathrm{Log}z} = \mathrm{Log}\overline{z}$ y $\overline{z^\lambda} = \overline{z}^{\overline{\lambda}}$. ¿Qué ocurre en las últimas expresiones para valores de z reales negativos?.

12. Expresar en forma binómica los siguientes complejos: $\mathrm{Log}(-e^2)$, $\mathrm{Log}(1 - i\sqrt{3})$, $(-1)^i$, $i^{\mathrm{Log}i}$, $(-e)^{\pi i}$, $(ie^{\pi/2})^i$.

13. Determinar la parte real e imaginaria, como funciones de x e y, de las siguientes funciones de variable compleja: $f(z) = z^3 - iz$, $f(z) = z^2 - 2i\overline{z}^2 + 1$, $f(z) = ze^z + z^{-1}e^{-z}$, $f(z) = \overline{z}e^z - ze^{\overline{z}}$.

14. Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como abiertos, cerrados o ninguno de los dos tipos: $A = \{z : -\pi < Imz \leq \pi\}$, $B = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $C = \{z : |Rez| + |Imz| \leq 1\}$, $D = \{z : 0 < \max\{x, y\} \leq 1\}$, $E = \{z : y > x^2\}$.

15. Determinar la clausura, frontera e interior de los conjuntos del ejercicio anterior.

16. Clasificar los siguientes conjuntos como conexos o disconexos: $A = \{z : |z| > 1\}$, $B = \{z : |z - i| \neq 1\}$, $C = \{z : x^2 - y^2 = 0\}$, $D = \{z : x^2 - y^2 < 1\}$, $E = \mathbb{C} \setminus \{z : Rez, Imz \in \mathbb{Q}\}$.

17. Determinar las componentes de los siguientes conjuntos: $A = \{z : |x| + |y| \neq 1\}$, $B = \{z : e^z \notin \mathbb{R}\}$.

18. Determinar los puntos de acumulación de las siguientes sucesiones: (i) $z_n = n^{-1} + (-1)^n$; (ii) $z_n = 2^{-n} + (-1)^n + i^n$; (iii) $z_n = [2 + \cos(n\pi)]e^{n\pi/5}$; (iv) $z_n = \sin(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$; (v) $z_n = n\sin(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$.

19. Calcular los siguientes límites:

    a) $\lim_{z\to i}[2z^2 - iz^3 + zArg\overline{z}]$ b) $\lim_{z\to i}\frac{z^4+1}{z+i}$ c) $\lim_{z\to -i}\frac{z^4-1}{z+i}$

    d) $\lim_{z\to 2i}\frac{z^2-iz+2}{z^2+4}$ e) $\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z}-1}{z-1}$ f) $\lim_{z\to 0}\frac{e^z+z\mathrm{Log}z}{1-z^2 Arg z}$

    d) $\lim_{z\to 0} e^{-1/z^2}$