Problemas del Tema 5.

1. Comprobar con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no siempre se cumple la "regla de los exponentes" para la exponencial de matrices.

2. Probar que si λ es un autovalor de A, entonces e^{λ} es autovalor de e^{A}, correspondiéndoles los mismos autovectores.

3. Calcular la forma canónica de Jordan, la matriz de paso y la exponencial e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, de las siguientes matrices,

(a)
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} a-b & b \\ -2b & a+b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & -1 \\ 1 & 2a-1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de a es nilpotente esta última matriz?

4. Hallar la solución general del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

para las elecciones: A cada una de las matrices del ejercicio anterior, $t_0 = 0$, $x_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $b(t) = (t, t^2)$, $b(t) = (\cos t, 0)$, $b(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t)$.

5. Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Calcular e^{A} y como aplicación e^{B}.

6. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x' = ax + by & x(0) = x_0 \\ y' = -bx + ay & y(0) = y_0. \end{cases}$$

Hállese la solución general del problema de Cauchy procediendo de la forma siguiente:

a) Redúzcase el sistema a una ecuación de segundo orden.

b) Hállese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación resultante para producir una matriz fundamental normalizada en $t = 0$.

c) Dése una solución alternativa al ejercicio 5.

7. Calcúlese la forma canónica de Jordan J, una matriz de paso P y la exponencial e^{tA} de cada una de las siguientes matrices 3×3.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(e)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(g)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Resuélvanse los problemas de Cauchy siguientes (cotejar los resultados del ejercicio anterior):

   (a)
   $$\begin{cases} x' = 4x + y + z & x(0) = 0 \\ y' = 2x + 3y + z + \operatorname{sen} t & y(0) = -1 \\ z' = 2x - y + 5z & z(0) = 0. \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x' = 3x + z + e^t & x(0) = 1 \\ y' = 3y + t & y(0) = 2 \\ z' = y + 3z & z(0) = -1. \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} x' = 3x - z & x(0) = \alpha \\ y' = 4y + z & y(0) = \beta \\ z' = -2y + 2z & z(0) = \gamma, \end{cases}$$

   donde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. ¿Pueden ser complejos α, β, γ?

9. Para las siguientes matrices A, calcular la forma canónica J, una matriz de paso P y e^{At}.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(h)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(j)

$$\begin{pmatrix} a-b & b & 0 & 0 \\ -2b & a+b & 0 & 0 \\ 1-2b & b & a-b & b \\ -2b & 2b+1 & -2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(k)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(l)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(m)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2' = 2x_2 + x_4 \\ x_3' = 2x_3 + x_4 \\ x_4' = 2x_4. \end{cases}$$

a) Calcúlese una matriz fundamental, hallando la solución general del problema de Cauchy con datos en $t_0 = 0$ y término no homogéneo

$$b(t) = (1, t, 0, \text{sen } t).$$

b) Hállese la solución del problema homogéneo ($b = 0$) sin recurrir a la matriz fundamental.

11. Hállese la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 & x_1(0) = a \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 & x_2(0) = b \\ x_3' = x_3 - 2x_4 & x_3(0) = c \\ x_4' = x_3 + 3x_4 & x_4(0) = d, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

12. Se considera el sistema lineal,

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 \\ x_3' = 3x_3 - 3x_4 \\ x_4' = 6x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Analícense sus soluciones periódicas ¿Cuántos tipos de soluciones periódicas admite?

13. Los autovalores de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ son $\{\pm 1, 6\}$ mientras que:

i) dim $N(A - I) =$ dim $N(A - I)^2 = 3$

ii) dim $N(A + I) = 3$, dim $N(A + I)^2 = 4$, dim $N(A + I)^3 =$ dim $N(A + I)^4 = 5$.

iii) dim $N(A - 6I) = 2$, dim $N(A - 6I)^2 =$ dim $N(A - 6I)^3 = 3$.

Hallar la forma canónica de Jordan de A.

14. Se considera la familia de funciones $\mathcal{S} = \{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_p t}\}$ donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Pruébese que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente. La misma cuestión si consideramos la familia ligeramente más grande, $\mathcal{S}' = \{e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \ldots, \ldots, e^{\lambda_p t}, \ldots, t^{m_p - 1} e^{\lambda_p t}\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

15. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ soluciones de la ecuación de orden n y coeficientes continuos:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \tag{1}$$

definidas en el intervalo (a, b). Pruébese que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si el Wronskiano $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \neq 0$ en cada punto del intervalo (a, b). A tales efectos utilícense los correspondientes resultados para sistemas tras reconvertir (1) a dicho formato.

16. Calcúlese un sistema fundamental de soluciones para las ecuaciones:

a) $x'' + x' - 6x = 0$ b) $x^{iv} + 5x'' - 36x = 0$
c) $x''' + 2x'' - 5x' - 6x = 0$ d) $x'' - 2x' + 5x = 0$
e) $x^{(iv)} - x''' - 9x'' - 11x' - 4x = 0$ f) $x''' + 4x = 0$
g) $x^{(vi)} + 9x^{(iv)} + 24x'' + 16x = 0$ h) $(D^2 - 2D + 5)^2 x = 0.$

donde $D = d/dt$.

17. Determinar el menor entero positivo n para el que una ecuación diferencial de la forma

$$x^{n)} + a_{n-1}x^{n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

tiene entre sus soluciones a las funciones

$$e^{-3t},\ te^{-t}\cos 2t,\ t,\ \text{sen}\ t\ .$$

18. Las ecuaciones de la forma:

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{(n-1)} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0,$$

se llaman ecuaciones de Euler. Se reducen a coeficientes constantes mediante el cambio de variable

$$t = e^{\tau}.$$

De acuerdo con esta estrategia, hállese en los siguientes casos un sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones correspondientes.

a) $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$ b) $(t+1)^2x'' + (t+1)x' - x = 0$
c) $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$ d) $(2t+1)^2x'' - 2(2t+1)x' - 12x = 0$
e) $t^3x''' + tx' - x = 0.$

19. Usando el método de coeficientes indeterminados, calcúlese una solución de las ecuaciones:

a) $x''' + 3x'' - 4x = te^{-2t}$ b) $x'' + (a+b)x' + abx = f(t)$
c) $x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t$ d) $y''' - y' = x$
e) $y''' - 8y = e^{ix}$ f) $y^{(iv)} + 16y = \cos x$
g) $y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$ h) $y^{(iv)} - y = \cos x$
i) $y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}.$

20. Utilícese el método de variación de parámetros para hallar una solución particular de las ecuaciones siguientes:

    a) $y'' + 4y = \cos x$ b) $y'' - y' - 2y = x^2 + \cos x$
    c) $y'' + 4y = \text{sen } 2x$ d) $y'' + 9y = x^2 e^{3x}$
    e) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ f) $y'' + y = xe^x \cos 2x$
    g) $y'' + iy' + 2y = 2\cosh 2x + e^{-2x}$ h) $y''' = x^2 + e^{-x}\text{sen } x$.
    i) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}$

21. Supongamos que las dos raíces del polinomio característico del operador lineal $\mathcal{L}y = y'' + a_1 y' + a_2 y$ están en el semiplano $\Re z < 0$ mientras $b \in C[0, +\infty)$ satisface $\sup_{t\geq 0} |b(t)| < +\infty$.

    a) Pruébese que toda solución de $\mathcal{L}y = b$ está acotada en $t \geq 0$.

    b) Demuéstrese que si $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$ entonces toda solución de $\mathcal{L}y = b$ también satisface la condición $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

22. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{1}$$

    donde los coeficientes son funciones continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Búsquese una función ϕ de forma que al introducir la nueva función incógnita y_1 ligada a y bajo la relación $y = \phi y_1$, la ecuación resultante en y_1 no presente el término en la derivada primera y_1', es decir para que (1) se transforme en:

$$y_1'' + \alpha(x)y_1 = 0.$$

23. Pruébese que la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

    admite una solución u de la forma:

$$u = \exp \int_{x_0}^{x} p(s)\ ds$$

    si y sólo si $p = p(x)$ satisface la ecuación de Riccati:

$$y' = -y^2 - a_1(x)y - a_2(x).$$

    Este resultado viene entonces a decir que las ecuaciones lineales de segundo de orden no son en general integrables elementalmente.

24. Sean $\{\phi_1, \phi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$ sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

    mientras $W(\phi_1, \phi_2)$, $W(\psi_1, \psi_2)$ son los correspondientes wronskianos. Mediante cómputo directo demuéstrese que:

$$W(\phi_1, \phi_2) = kW(\psi_1, \psi_2),$$

    para cierta constante k. ¿Por qué es conocida ya esta conclusión, en base a los resultados de matrices fundamentales?

25. Se considera la ecuación de Hill,

$$y'' + \alpha(t)y = 0,$$

donde $\alpha = \alpha(t)$ es periódica de período T. Sea $\{\phi_1, \phi_2\}$ un sistema fundamental de soluciones normalizado en $t = 0$, mientras $W = W(\phi_1, \phi_2)$ designa su wronskiano.

a) Probar que $W(t) = 1$.

b) Probar que la ecuación admite una solución periódica (no trivial) de período T si y sólo si $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 2$.

26. A una barca se le comunica una velocidad inicial de 6 m/s. A los 60 segundos del comienzo del movimiento, esta velocidad ha disminuido a la mitad. Hallar la ley del movimiento de la barca, si la resistencia del agua es directamente proporcional a la velocidad de la barca.

27. Un cuerpo se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Hallar la altura máxima alcanzada, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.

28. Una masa m, libre para moverse por el eje OX, es atraída hacia el origen con una fuerza proporcional a su distancia al origen. Hallar el movimiento a) si se pone en marcha en $x = x_0$ partiendo del reposo y b) si se pone en marcha en $x = x_0$, con una velocidad inicial v_0, alejándose del origen.

29. Tenemos un objeto sujeto a una pared mediante un resorte. Supondremos que el objeto se mueve en una única dirección (el eje OX).

a) Estudiar el movimiento del objeto si se aplica una fuerza externa constante.

b) Lo mismo, con una fuerza de la forma $F = F_0 e^{-t}$.

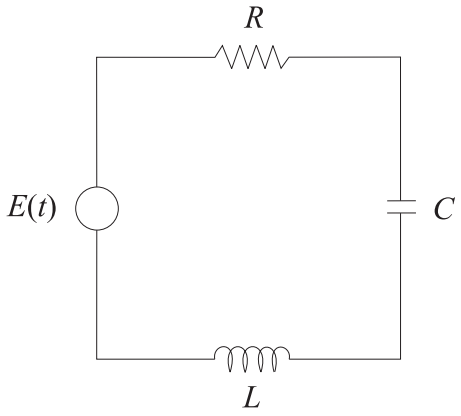
30. Una masa de 1 Kg. se halla sujeta a un resorte con constante de recuperación $k = 4N/m$. Estando la masa en equilibrio en $t = 0$, se le aplica una fuerza externa $F(t) = (1 + t + \text{sen } 2t)$. Se sabe que si el muelle se estira una longitud $1/2 + \pi/4$ (o más) desde su posición de equilibrio, se romperá. Supóngase que no hay amortiguamiento y hallar el tiempo que tarda en romperse el resorte.

31. El cañón de un tanque M60 (vehículo de combate) se encuentra sujeto a un sistema con una constante de recuperación de $100\alpha^2$, y una constante de amortiguación de 200α. La masa del cañón es 100 Kg. Llamemos $y(t)$ a la distancia desde el cañón a su posición de equilibrio. Suponiendo que $y(0) = 0$, $y'(0) = 100m/s$, se desea calcular α para que un segundo más tarde la cantidad $y^2 + y'^2$ sea menor que $0'01$.

32. Plantear y resolver la ecuación del circuito dado debajo si se supone que inicialmente no hay carga, y la intensidad de corriente es cero, cuando la fuerza electromotriz E verifica:

a) E=cte.

b) $E = E_0 \cos wt$.



33. Supóngase que en el circuito anterior no hay resistencia. ¿Qué ocurre si $E = E_0 \cos wt$?

34. Se conectan en serie una fuerza electromotriz de 500 voltios, una resistencia de 20 ohmios, una autoinducción de 4 henrys y un condensador de 0'008 faradios. La carga $q(t)$ y la intensidad de corriente $i(t)$ son nulas cuando $t = 0$. Se pide hallar $q(t)$ e $i(t)$. ¿Qué ocurre cuando ha transcurrido mucho tiempo?