Problemas del Tema 4.

1. Se considera el problema:
$$\begin{cases} y' = y + \lambda x^2 \text{sen } y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
$\lambda \in \mathbb{R}$. Pruébese que admite una única solución definida en todo $\mathbb{R}$. Hállese una estimación del error cometido cuando la solución se sustituye por la del problema:
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
en el intervalo $|x| \leq 1$.

2. Se considera:
$$\begin{cases} y' = t + y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad (P)$$
y el problema aproximado,
$$\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (P_0)$$
(a) Suponiendo que la solución de (P) está definida en el intervalo $[0, l]$, satisfaciendo $|y(t)| \leq K$, $K > 0$, hállese una estimación del error cometido al sustituir la solución de (P) por la de (P_0).
(b) Si $y(t)$ es la solución de (P) prúebese que $y(t) > 1$, $y'(t) > 0$, $y''(t) > 0$ para $t > 0$. Probar que,
$$y(t) > 1 + (1 + \varepsilon)t \qquad t > 0.$$
(c) Pruébese que la solución $y(t)$ de (P) satisface:
$$y' \geq \varepsilon y^2 \qquad t > 0,$$
por lo que el intervalo maximal de existencia a la derecha $[0, \omega)$ es finito y cumple $\omega \leq 1/\varepsilon$.

3. El problema
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

se toma como aproximación de

$$\begin{cases} y' = y + \lambda \dfrac{y}{1+y^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $|x| \leq 1$. Hállese una estimación del error.

4. Se considera la familia de funciones:

$$f_n(x,t) = \frac{\text{sen } t \text{ sen } nx}{n^2}.$$

a) Hállese el límite de la sucesión $f_n(x,t)$ justificando que el límite es uniforme en $\mathbb{R}^2$.

b) Para $f = \lim f_n$ hállese la solución de,

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

c) ¿Qué se puede decir de la solución x_n del problema:

$$\begin{cases} x' = f_n(t,x) \\ x(0) = \dfrac{1}{n^2}? \end{cases}$$

5. La desigualdad de Gronwall establece que si:

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)\ ds \qquad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

donde f, g, y son continuas, $g \geq 0$, entonces,

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(\tau)\ d\tau}\ ds \qquad a \leq t \leq b. \tag{2}$$

Pruébese que si f es C^1 y $f' \geq 0$ en $[a,b]$ entonces (1) implica la siguiente versión mejorada de (2):

$$y(t) \leq f(t)e^{\int_a^t g(s)\ ds}.$$

6. Supongamos que $f = f(x,y,\lambda)$ está definida en $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es C^1 y satisface:

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\lambda)| \leq L \qquad |\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)| \leq K,$$

$x \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $y = y(x,\lambda)$ la solución de:

$$\begin{cases} y' = f(x,y,\lambda) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el intervalo $[a,b]$. Pruébese que:

$$|y(x,\lambda) - y(x,\mu)| \leq \frac{K}{L}|\lambda - \mu|(e^{L|x-a|} - 1).$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite la solución $x = \text{sen } t$. Demuéstrese que para n suficientemente grande la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) + \dfrac{1}{n} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene al menos dos ceros en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Indicación. Demuéstrese que $x_n(t) > x(t)$ para todo n y todo $t \in (0, 2\pi]$.

8. En los problemas que siguen $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ representa la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(a) Calcúlense, justificando su existencia, todas las derivadas parciales de primer orden de $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ en $(t, t_0, x_0, \lambda) = (t, t_0, x_0, 0)$, siendo $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la solución general del problema:

$$\begin{cases} x' = x^2 + \lambda x^3 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(b) Los mismos cálculos para:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x-1)^2}{2} + \lambda e^t \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0, λ), $x_0 = 1$, $\lambda = 0$.

(c) La misma cuestión para:

$$\begin{cases} x' = x(1-x)(x-\alpha) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0), $x_0 = \alpha$.

(d) Calcular las derivadas de primer orden de la solución general $x(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ del problema,

$$\begin{cases} x' = x^2 + \varepsilon t^2 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en $\varepsilon = 0$.

(e) La misma cuestión para la solución general del problema:

$$\begin{cases} x' = x(\mu - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en los puntos $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, 0)$, $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, \mu)$.

9. Sea $A = A(t)$ una función matricial continua definida en $\mathbb{R}$ mientras $x = x(t, y)$ es la solución de:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = y. \end{cases}$$

Si $X(t) = \dfrac{\partial x}{\partial y}(t, y)$, prúebese que X satisface:

a) $X(0) = I$ (la matriz identidad $n \times n$).

b) $X'(t) = A(t)X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.