**Problemas del Tema 1.**

1. Determínese el orden de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $x^2y'' + xy' + 2y = \operatorname{sen} x$

   (b) $(1+y)^2y'' + xy' + y - e^x = 0$

   (c) $y' + xy^2 = 0$

   (d) $y'' + \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x$

   (e) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, se pide comprobar si la función o funciones dadas son soluciones en el intervalo dado.

   (a) $y'' + y = 0, \qquad y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = \cosh x,\ x \in \mathbb{R}.$

   (b) $y''' + 2y' - 3y = 0, \qquad y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$

   (c) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad y_1(x) = \sqrt{x},\ y_2(x) = x^{-1},\ x > 0.$

   (d) $y'' + y = \sec x, \qquad y(x) = \cos x \log(\cos x) + x\operatorname{sen} x,\ 0 < x < \pi/2.$

3. Escribir como una única ecuación (en $\mathbb{R}^2$) los siguientes sistemas:

   (a) $\begin{cases} x' = y^2 + 2 \\ y' = x - 2xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = e^t + 5x \end{cases}$

4. Escribir como una ecuación de primer orden las siguientes ecuaciones:

   (a) $y'' + 2y' - y = e^t$

   (b) $y''' - 4(y')^2 + \operatorname{sen} x = 3 - y$

   (c) $x'' + f(x) = 0$

5. Determínense los valores de $r$ para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = e^{rx}$.

   (a) $y' + 2y = 0.$

   (b) $y'' + y' - 6y = 0.$

   (c) $y'' - y = 0.$

   (d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

6. Determínense los valores de $p$ para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = x^p$.

   (a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

   (b) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$.

7. Trácese el campo de direcciones de la ecuación:

$$x' = t^2 + x,$$

   esbozando la gráfica aproximada de las soluciones.

8. Dada la ecuación:

$$x' = 1 + t - x,$$

   hállese el campo de direcciones. Demuéstrese que $x(t) = t$ es una solución y dése la forma aproximada de las soluciones.

9. Aplicando el método de isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes.

   (a) $y' = -\frac{y}{x}$.

   (b) $y' = y$.

   (c) $y' = x + y$.

   (d) $y' = x^2 + y$.

10. Resolver aproximadamente, usando el método de Euler, los siguientes problemas de Cauchy, en los intervalos especificados y con el paso dado.

    (a) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $x \in [1, 4]$, $h = 0'5$.

    (b) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.

    (c) $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.

11. Obtener una solución de los problemas de Cauchy

    (a) $x' = x$, $x(0) = 1$.

    (b) $x'' = -x$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

    (c) $x'' = x$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

12. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = \sqrt{|x|}.$$

    Sabiendo que $x(t) = t^2/4$ es una solución,

    (a) Demostrar que existen infinitas soluciones que satisfacen $x(0) = 0$.

    (b) ¿Para qué valores de $\alpha$ existen infinitas soluciones en $[0, \alpha]$ cumpliendo $x(0) = -1$?

13. Para $k$ y $\alpha$ constantes positivas estúdiense las soluciones de la ecuación:

$$x' = kx(\alpha - x),$$

sin resolverla.

14. Demuéstrese que si $x(t)$ es una solución de la ecuación

$$x' = -x(t^2 - x^2),$$

$|x(t_0)| < |t_0|$ entonces $|x(t)| < |t|$ para $|t| > |t_0|$.

15. Supongamos que $f(t, x)$ es continua y positiva en $\mathbb{R}^2$. Pruébese que si $x(t)$ es una solución de:

$$x' = txf(t, x),$$

se verifica para todo $t \neq 0$:

$$x(t) > x(0) \quad \text{si } x(0) > 0, \qquad x(t) < x(0) \quad \text{si } x(0) < 0.$$